Quantenchromodynamik (QCD) bei hoher Gluondichte und das Saturationsproblem

F. Schrempp, DESY

Plan

1. **QCD bei Hoher Gluondichte**
2. **Instantonen und Saturation**
3. **Zusammenfassung**

Kopie erhältlich via WWW:

http://www.desy.de/~t00fri/talks/talks.html

– München, Mai 2004 –

1. QCD bei Hoher Gluondichte

1.1 Elemente der QCD

- **Standard Modell** der Teilchenphysik extrem erfolgreich!

- **Rahmen:** Theorie der $\left\{\begin{array}{l}\text{starken}\\ \text{elektromagnetischen}\\ \text{schwachen}\end{array}\right.$ Wechselwirkungen in Form einer **Relativistischen Quanten Feldtheorie**, elementare Teilchen $\Rightarrow$ Felder

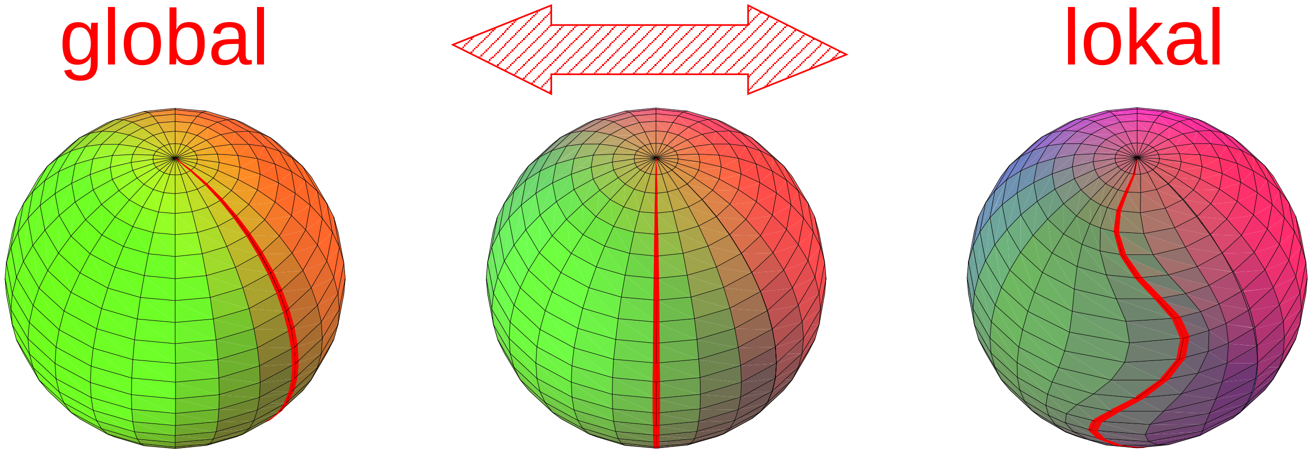
- **Elementare Materiebausteine: Quarks & Leptonen** (Spin $\frac{1}{2}$)

- ♣ **Eichprinzip:**
  Form **aller** Wwn. aus der Forderung einer **lokalen Eichsymmmetrie!** $\Rightarrow$

  ♣ Existenz von **Eichbosonen** (Spin 1)
  {Gluonen (g), Photon (γ), $W^{\pm}, Z^0$} als Trägerteilchen der Eichkräfte.

  - Eichtransformationen $\Leftrightarrow$ verallgemeinerte Phasentransformationen (Rotationen): $U(x) = \exp\left[i\vec{\epsilon}(x)\cdot\vec{T}\right];\ U\,U^\dagger = U^\dagger U = 1;\ \det U = 1$

Symmetrie unter Drehungen



- Längen-Zählung per Konvention: Global ⇔ separat an jedem Punkt (!) des Ballons (lokal)
- **Ballon** (Fig.): Lokale Rotationsinvarianz bedingt Kräfte!
- **Q**uanten**C**hromo**D**ynamik (**QCD**):
- Quarks und Gluonen tragen **"Farbladung"**, Quark q = {q q q} **Triplett**, Hadronen **farblos** (Proton **P**=qqq)!
- Physik invariant unter nicht-abelscher Lie-Gruppe $SU(3)_{\mathrm{Farbe}}$ von lokalen Eichtransformationen $U(x) \subset SU(3)_{\mathrm{Farbe}}$ der Quark- und Gluonfelder!
- Quanteneffekte? . . .

- Für $\alpha \equiv \frac{g^2}{4\pi} \ll 1 \Rightarrow$ **Störungstheorie**, **Feynman**-Graphen. . .

- Störungstheorie für starke "Farb"- Wwn?? $\Leftarrow$**Vakuumpolarisationseffekte**!
  Eichkopplungskonstante $\alpha_s \Rightarrow$ laufende Kopplung $\alpha_s(Q^2)$,
  $Q =$ relevante Impulsskala $\sim 1/$Abstand.

- **QED:** Abschirmung der elektrischen Ladung bei zunehmendem Abstand.

♣ QCD : Gluonen tragen Farbladung $\Rightarrow$ Gluon-Selbstwechselwirkung! $\Rightarrow$ **umgekehrter Effekt!**:

♣ Abschirmung der Farb-Ladung für kleine Abstände, $\lim_{Q^2\to\infty} \alpha_s(Q^2) = 0$**!** (**"Asymptotic Freedom"**).

♣ **Störungstheorie** für große Q^2: $\alpha_s(Q^2) \ll 1$! $\Rightarrow$ **HERA!**

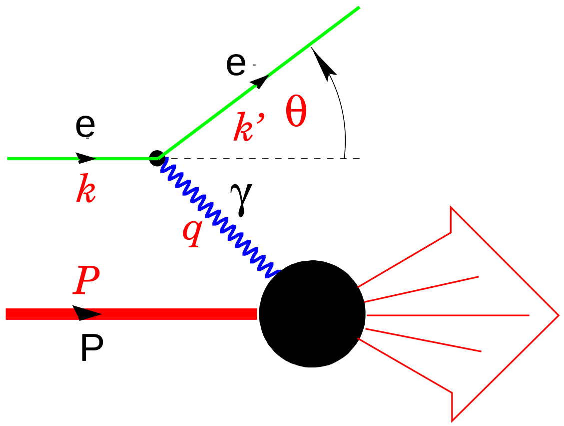
♣ Farbkopplung wächst "unbeschränkt" an für große Abstände $\Rightarrow$ **"Confinement"**! Nur farbneutrale Bindungszustände der Quarks und Gluonen beobachtbar (**Hadronen**)!

– Aus Quarks werden hadronische **Jets** im Detektor!

1.2 Hohe Gluondichte bei HERA

- **Tiefunelastische eP Streuung:** “Wiege” der störungstheoretischen QCD !
- Studium der Protonstruktur via “Elektronen Mikroskop” mit hochvirtuellen Photonen:

$$Q^2 = -q^2 = (k-k')^2 = 4E_eE'_e\sin^2(\tfrac{\theta}{2});$$



Hohe transversale Auflösung: $\Delta x_\perp \sim \frac{1}{Q}$

Bjorken-$x = \frac{Q^2}{2P\cdot q}$; $0 \le x \le 1$;

Anteil des Protonimpulses, den das am Photon gestreute Parton im Proton trägt.

$\gamma\, P$-Energie^2 $W^2 = (q+P)^2 = Q^2(\frac{1}{x}-1) \Rightarrow$

Hochenergie-Streuung für $x \to 0$

- Virtuelles Photon “sieht” quasi-freie **Partonen** (= Proton-Konstituenten = Quarks & Gluonen).

- **Wichtige Observable:**

  Proton Strukturfunktion $F_2(x, Q^2)$

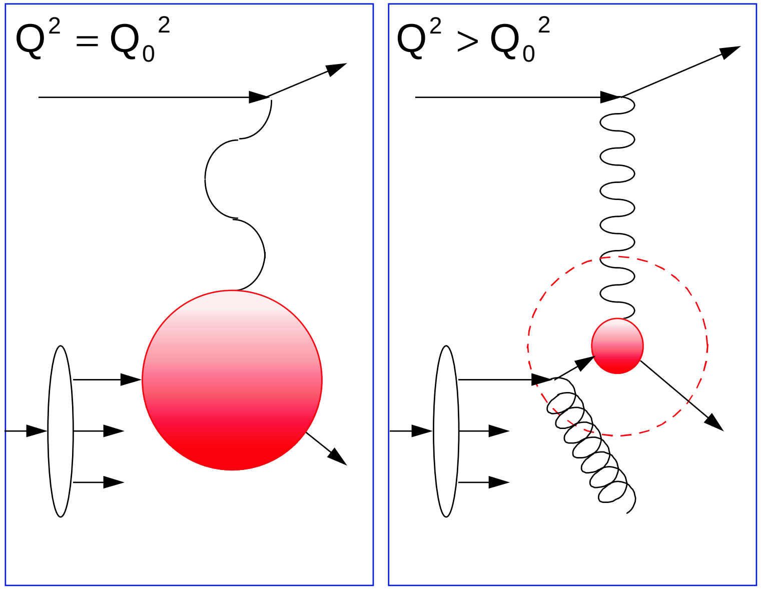
- **Prä-QCD** : Bjorken- Scaling

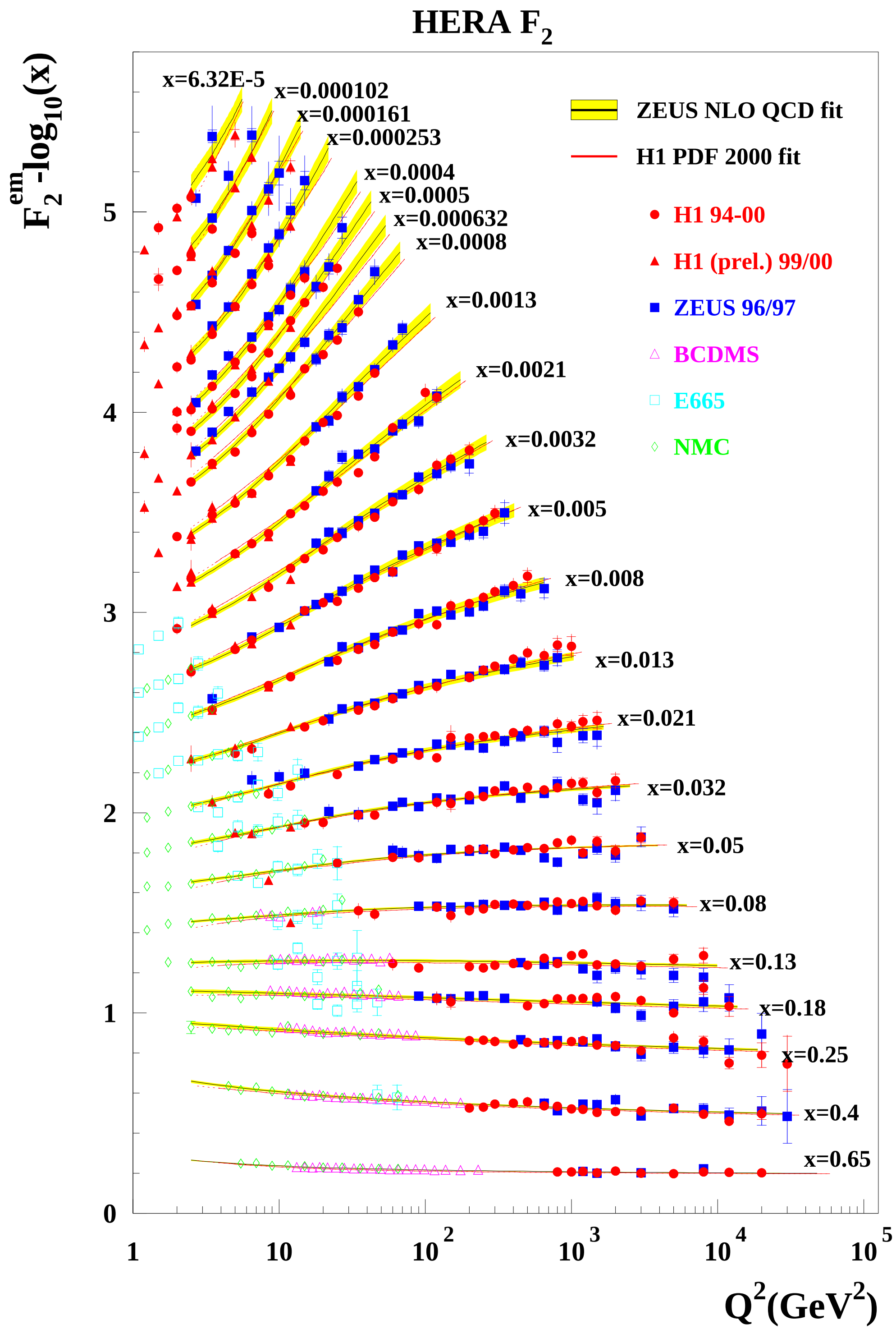
  im naiven Parton Modell: Q^2 groß $\rightarrow$

  $F_2(x) = \sum_f e_f^2\,(x\,\boldsymbol{q}_f(x) + x\,\bar{\boldsymbol{q}}_f(x))$

  Quarkdichten $\boldsymbol{q}_{\{u,d,\ldots\}}(x)$ im Proton

- **QCD :** Gluonen! :Wechselwirkung über störungstheoretische Elementarprozesse der QCD , da laufende QCD -Kopplung $\alpha_s(Q^2) \ll 1$ (Asymptotische Freiheit!)





- **Scaling-Verletzung** durch Gluonabstrahlung, eine grundlegende Voraussage der QCD -Störungstheorie (Fig: **HERA F$_2$**)!

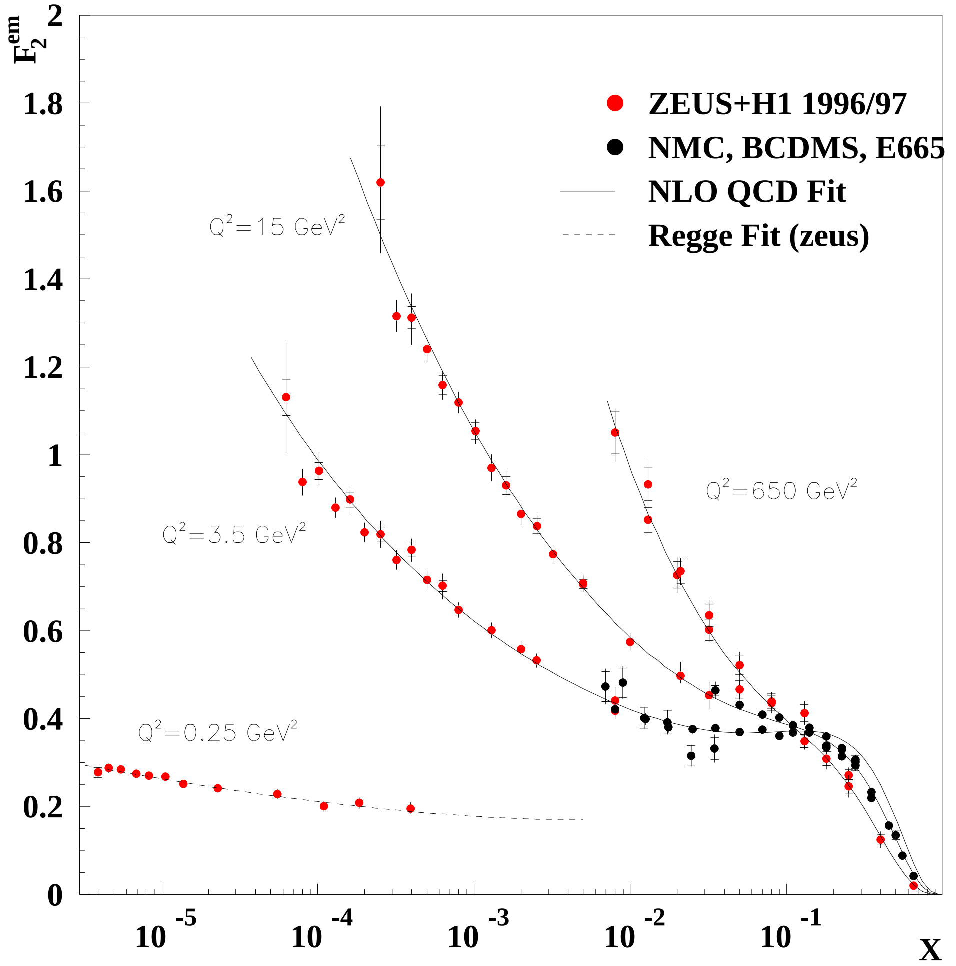
- Gluondichte $\neq 0$ im Proton!

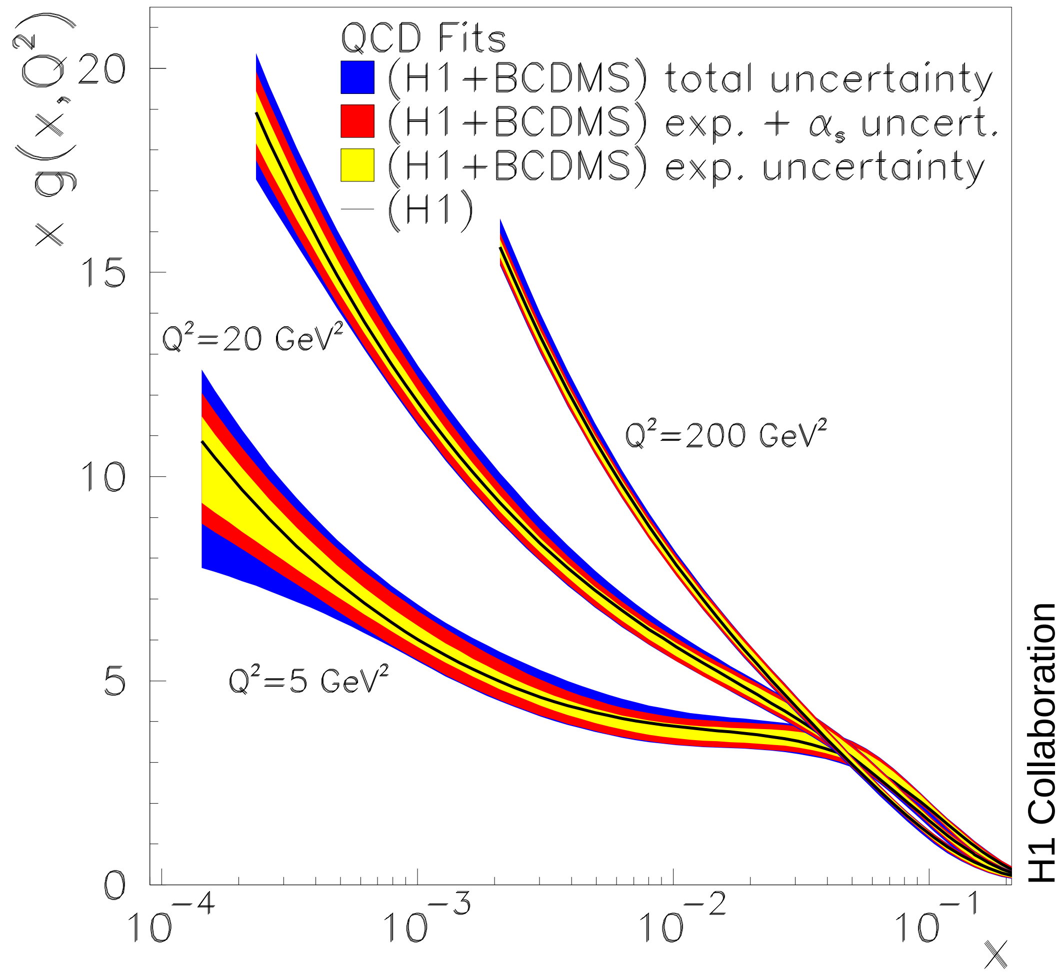
- **Betrachte:** Q^2 fest, $x \rightarrow \mathbf{0}$

- Scaling-Verletzung $\Leftrightarrow$ Gluondichte !

$$\frac{d\,F_2}{d\,\log Q^2} \propto \alpha_s \cdot x\,\mathbf{g}(x, Q^2)$$

- **Eine der wichtigsten Entdeckungen bei HERA**: Starkes, Q^2-abhängiges Anwachsen der F2-Strukturfunktion und damit der Gluondichte für $x \Rightarrow 0$!





1.3 Saturation im Partonbild

- Saturation der Gluondichte? Noch keine direkte experimentelle Evidenz bei **HERA**! Aber theoretisch kaum vermeidbar. . .

- **Erhaltung der Wahrscheinlichkeit** (**S**treu-Matrix unitär!): $F_2 \propto Q^2 \sigma_{\gamma^* P}$ kann nicht beliebig stark für $x \to 0$ d.h. $W \to \infty$ anwachsen!

  Froissart Schranke: $\sigma \leq \sigma_0\, \mathcal{O}(\log^2 W) = \sigma_0\, \mathcal{O}(\log^2 \frac{1}{x})$

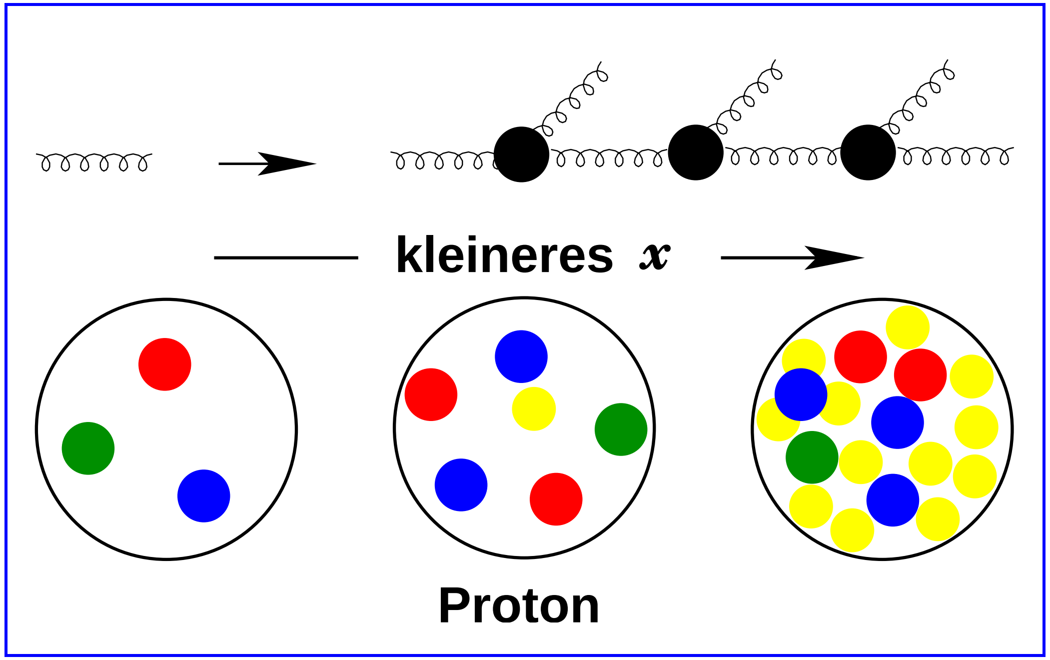
- Verletzt durch (resummierte) QCD Störungstheorie (**BFKL**)! Terme $\propto (\alpha_s \log \frac{1}{x})^n$; α_s klein, aber $\log \frac{1}{x}$ groß. . .

- Problematik aufgrund der Vernachlässigung von Wwn. der Partonen untereinander (kein freies Partongas für $x \to 0$)!

- Anzahl der **Gluonen** im Proton nimmt stark zu mit abnehmendem x d.h. zunehmender $\gamma^* P$ Energie W!

- "Ausdehnung" $\sim \frac{1}{Q}$ der Partonen nimmt zu mit abnehmenden Q^2

- Partonen im Proton überlappen bei $x \approx x_{\mathrm{Sat}}(Q)$ bzw. charakteristischer **Impulsskala** $Q \approx Q_{\mathrm{Sat}}(x)$!



- Nichtlineare Korrektionen zur üblichen Partonevolution! Anstieg der Gluonverteilung wird gedämpft, d.h. man erwartet einen Saturationszustand der Gluonen im Proton.

1.4 Saturation im Instanton-Hintergrund?

[F. Sch., J.Phys.**G28** (2002) 915;
F. Sch. & A.Utermann, Phys. Lett. **B543** (2002) 197; Acta Phys. Polon. **B33** (2002) 3633;
Proc. *SEWM 2002*, Heidelberg [hep-ph/0301177]; hep-ph/0401137;
A. Utermann, PhD-Thesis, DESY-THESIS-2003-029 (2003).]

- **HERA** Experimente für $x \to 0$ machen neuartiges, interessantes QCD -Regime zugänglich:
  Gluonen im Proton der Fläche πR^2 mit $\boldsymbol{x \to 0}$
  $\Leftrightarrow$ System hoher Dichte und Wechselwirkungs-Wahrscheinlichkeit

$$\mathcal{P}_g \quad = \quad \sigma_{gg} \cdot n_g \sim \frac{\alpha_s(Q^2_{\rm Sat})}{Q^2_{\rm Sat}} \frac{xG(x,Q^2_{\rm Sat})}{\pi R^2} \sim \mathbf{1}$$

$$\text{mit } \boldsymbol{\alpha_s(Q^2_{\rm Sat})} \quad \ll \quad \mathbf{1}, \text{ da} \quad Q^2_{\rm Sat}(x) \sim \alpha_s \frac{xG(x,Q^2_{\rm Sat}(x))}{\pi R^2} \gg \Lambda^2_{QCD} \quad \text{(c.f. HERA)}$$

- Trotz $\boldsymbol{\alpha_s(Q^2_{\rm Sat})} \ll \mathbf{1}$, **Zusammenbruch der QCD -Störungstheorie**, da Gluon-WWn durch hohe Dichte verstärkt werden!

- **Grundlegende offene Fragen:**
  Saturationsmechanismus? Dynamischer Ursprung der Saturationsskala $Q \approx Q_{\rm Sat}(x)$??

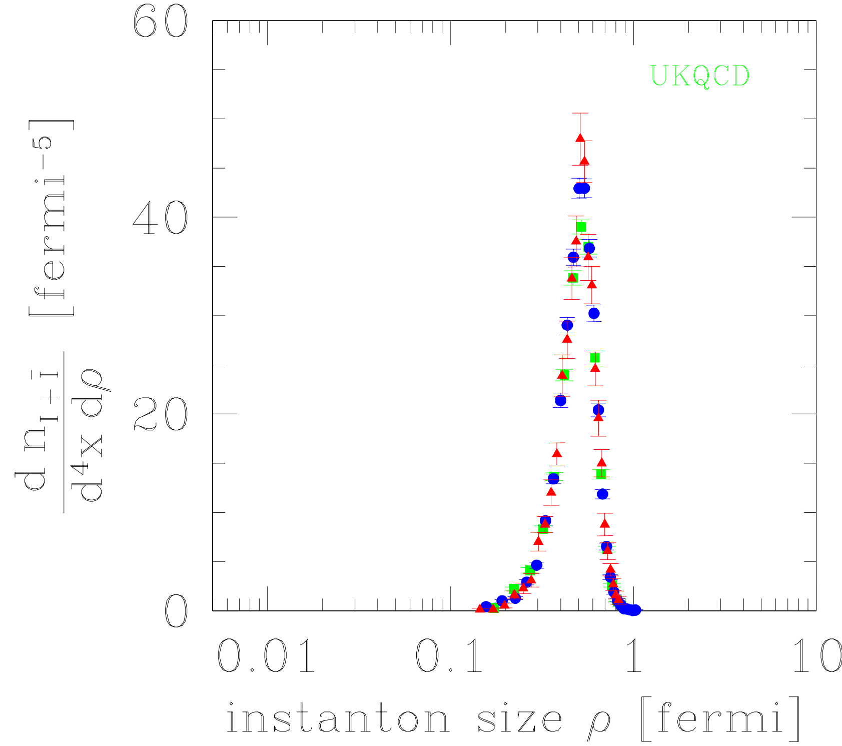
- **Populärer Rahmen** [McLerran *et al*]:
  - Saturationszustand $\Leftrightarrow$ Multigluon-Zustand hoher Besetzungszahl $\propto \frac{1}{\alpha_s}$:
  - **"Farb-Glas Kondensat"**, assoziiert mit starkem klassischem nicht-perturbativem Gluonfeld $A_\mu \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha_s}}$

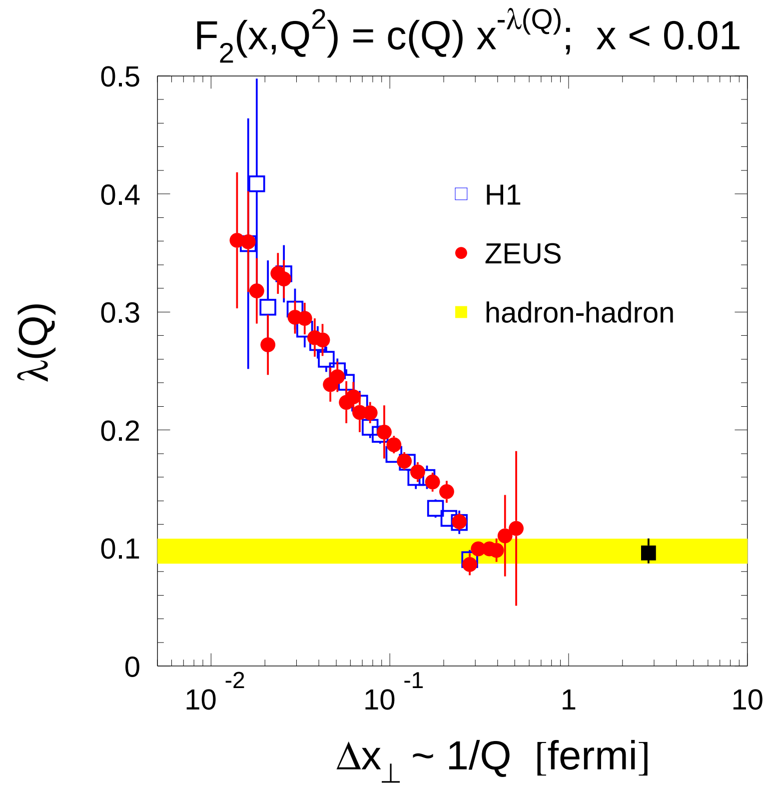
♣ **Instanton ($\boldsymbol{I}$)**-Eichfelder [Belavin *et al.* '75, 't Hooft '76] hochinteressant!

- Nicht-perturbative, explizit bekannte, starke klassische, ausgedehnte Fluktuationen des Gluonfeldes, $A^{(I)} \propto \frac{1}{\sqrt{\alpha_s}}$! ($\Rightarrow$ Sektion 2)
- Realisieren nicht-triviale Topologie der Gluonfelder

♣ **Zentrale Fragen**:

- **Saturation** im **Instanton**-Hintergrund?
- **"Farb-Glas Kondensat"** $\Leftrightarrow$ QCD -**"Sphaleron"**?
- Zusammenhang zwischen der charakteristischen $\boldsymbol{I}$-Ausdehnung $\langle\rho\rangle \approx \mathbf{0.5}$ fermi und Saturationsskala $\mathbf{1}/\boldsymbol{Q}_{\text{Sat}}$?? (Figs rechts!)





2. Instantonen und Saturation

2.1 Topologische Objekte in der Feldtheorie

- Quanten-Feldtheorie in störungstheoretischer Näherung: enorm erfolgreich.
- Potenzreihen Entwicklung (des Feynman'schen Pfadintegrals) um triviale Feldkonfiguration $\Phi_i = 0$, für $g \ll 1$.
- Materiefelder ⇔ punktförmige, elem. Objekte (Teilchen).

Nicht-lineare Feldtheorien ‖ Nicht-abelsche Eichtheorien

auch stabile, lokalisierte Lösungen mit
raum (-zeit)licher Ausdehnung

Solitonen ‖ Vortex-Lösungen, magn. Monopole & **Instantonen**.

♣ **Gemeinsam:**
Stabilität und Existenz ⇔ Nicht-triviale **Topologie** der Randbedingungen!

♣ Neue Störungstheorie um solche Lösungen ⇒ Einblick in wichtige Quanteneffekte außerhalb der üblichen Störungstheorie um $\Phi_i = 0$!

2.2 Instantonen in der QuantenChromoDynamik

- **Grundzustand in QCD ("Vakuum"):**

  "Suppe" aus Gluonen und Quarks mit komplizierter, nicht-perturbativer Wechselwirkung.

- **Betrachte zunächst:**
  "Reine" $SU(3)_{\rm color}$ Eichtheorie (nur Gluonfelder $A_\mu(x)$ ohne Quarks) $\Leftarrow$ **Topologie?**

- **Lokale Eichsymmetrie**: $\forall\ U(x) \subset SU(3)_{\rm color}$, ist die QCD Lagrange-Dichte

  $\mathcal{L}[A_\mu(x)]$ invariant unter $\boxed{A_\mu(x) \Rightarrow A'_\mu(x) = U^{-1}(x)(A_\mu(x) + \frac{i}{g}\partial_\mu)U(x)}$

- **Gesucht:** Mögliche Grundzustände,

  charakterisiert durch $\boxed{\text{endliche Wirkung } S = \int d^4x\, \mathcal{L}, \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{L}[A_\mu(x)] \overset{|x|\to\infty}{\Rightarrow} 0}$

  ◇ Erfüllt durch triviale Feldkonfiguration $A_\mu(x) \equiv 0$, $S = 0$ ($\Leftarrow$ übliche Störungstheorie).
  ◇ Viel zu restriktiv aufgrund lokaler Eichinvarianz $\Rightarrow$

  Randbedingungen für Grundzustand
  $$\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}(x) \overset{|x|\to\infty}{\Rightarrow} -\frac{i}{g}\underbrace{U^{-1}(\vec{x})\nabla U(\vec{x})}_{\text{"reine Eichung"}}; \\ A_0(x) = 0 \text{ (o.B.d.A)} \end{array} \right.$$

- Mögliche Grundzustands-Eichfelder $\vec{A}_\infty[U(\vec{x})]$: (Homotopie-) Klassen von Abbildungen $\{\vec{x}\}\Rightarrow\{U_n\}$, charakterisiert durch topologische Windungszahl $\boldsymbol{n} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

  $\Leftrightarrow$ Gluonfelder $A_\mu(x)$ tragen ganzzahlige, erhaltene topologische Ladung $\boldsymbol{\mathcal{Q}} = \Delta n \;\Rightarrow$

♣ ∞ viele, energetisch degenerierte aber topologisch inäquivalente klassische Grundzustände (Fig)!

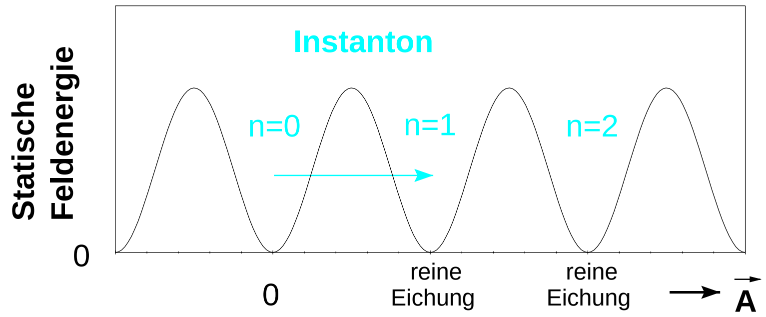
♣ **Instantonen (I), Anti-Instantonen ($\bar{I}$):**

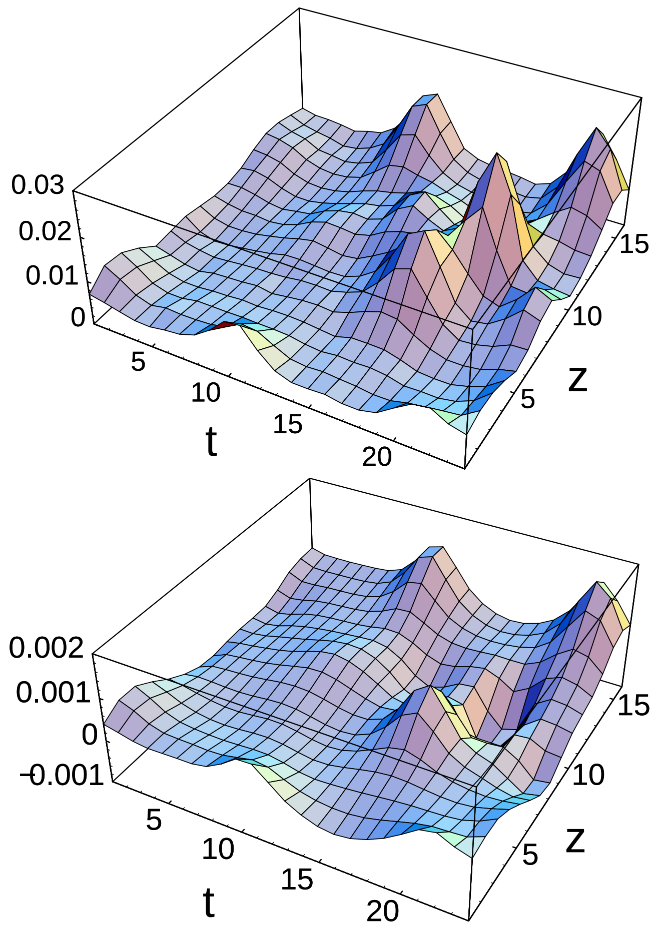
[Belavin *et al.* '75, 't Hooft '76]

◇ Tunnel Übergänge zwischen benachbarten Vakua $n \rightleftharpoons n+1, \boldsymbol{\mathcal{Q}} = \Delta n = \pm 1$ (Fig.)

◇ Lösungen $A_\mu^{(I)}(x)$ der klass. Feldgleichungen (in 4d Euklidischer Raum-Zeit, d.h. für imaginäre Zeit !)

◇ Nicht-perturbative, topologisch nichttriviale Fluktuationen der Gluonfelder, lokalisiert ("instantan") in Zeit und Raum





(Realistische, nicht-perturbative Gittersimulation, [Chu *et al.*'94], 3 $\boldsymbol{I}$'nen und 2 $\bar{\boldsymbol{I}}$'nen erkennbar!)

2.3 Instanton-Störungstheorie

[Balitsky, Braun '93, Ringwald, F. Sch. '94 -'97; Moch, Ringwald, F. Sch., Nucl. Phys. B507 (1997) 134; Ringwald, F. Sch., Phys. Lett B438 (1998) 217; hep-ph/9812359]

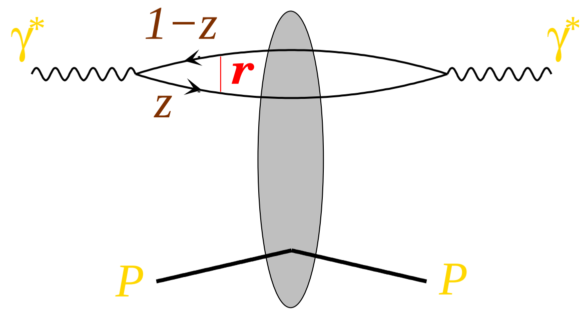
	Übliche Störungstheorie	**Instanton**-Störungstheorie
Chiralitätsverletzung	$\mathbf{0}$	$\mathbf{2\,n}_{\text{Flavours}}$
Entwicklung um	"triviales" Vakuum $A_\mu(x) \equiv 0$	klassische QCD-Instanton Lösung: $A_\mu^{(I)}(x;U,\rho) = \frac{-i}{\sqrt{4\pi\alpha_s}} \frac{U\,[\sigma_\mu \bar{x} - x\bar{\sigma}_\mu]\,U^\dagger}{2} \frac{\rho^2}{x^2} \frac{1}{x^2+\rho^2}$
minimale Wirkung	$S_E = 0$	$S_E^{(I)} = \frac{2\pi}{\alpha_s}$
kleiner Parameter	$\alpha_s(Q^2) \ll 1$	$\alpha_s(Q^2) \ll 1$

- $\sigma_\mu = (-i\vec{\sigma}, 1)$, $\bar{\sigma}_\mu = (i\vec{\sigma}, 1)$, wobei $\vec{\sigma}$ die 2×2 Pauli-Matrizen sind und $x = x_\mu \sigma^\mu$ etc.
- **Kollektive Koordinaten:** $\boldsymbol{\rho}$= Instanton-Ausdehnung, Farborientierungsmatrizen U.
- I-Wirkung unabhängig von ρ, U!
  Observable involvieren stets Integrale über alle kollektive Koordinaten

♣ Rate für dominante Instanton-induzierte eP-Prozesse mit Chiralitätsverletzung konnte im Rahmen der Instanton - Störungstheorie **berechnet** werden. 2 **HERA** Experimente. . .

2.4 Das Farbdipol-Bild

- Das “Farbdipol” Bild stellt einen intuitiven Rahmen für das Studium des Saturationsproblems für $x \to 0$ dar.



z: Anteil des longitudinalen Photon-Impulses den das Quark trägt

$\boldsymbol{r}$: transversale Ausdehnung des $(q\bar{q})$-Farbdipols

[Nikolaev & Zakharov ’90; Mueller ’94]

- **Intuitiv im Proton (P) Ruhesystem:** Das virtuelle Photon γ^* fluktuiert dominant in einen $(q\bar{q})$-Farbdipol für $x \to 0$ lange vor der Wechselwirkung, wobei

$$\tau_{q\bar{q}-\mathrm{Formation}} \gg \tau_{(q\bar{q})\,P-\mathrm{Wechselwirkung}} \quad \to \quad \text{Faktorisierung}$$

$$\boxed{\sigma_{L,T}(x, Q^2) = \int_0^1 dz \int d^2\boldsymbol{r}\, |\Psi_{L,T}^{\gamma^* \to q\bar{q}}(z, r)|^2\, \sigma_{\mathrm{DP}}(r, \ldots)}$$

- $|\Psi_{L,T}^{\gamma^* \to q\bar{q}}(z, r)|^2$ = Betragsquadrat der Wellenfunktion eines longitudinalen (L) bzw. transversalen (T) Photons, berechenbar in QCD -Störungstheorie.

- $\sigma_{\mathrm{DP}}(r, \ldots) = (q\bar{q})$-Farbdipol-$P$ Wirkungsquerschnitt. Enthält die wesentlichen nicht-perturbativen Beiträge (Proton!)

- Einfachster Zugang im Rahmen der QCD -Störungstheorie: ($r^2 \sim 1/Q^2$ klein)
  Zweigluonenaustausch [Frankfurt *et al* '93]:

$$\sigma_{\mathrm{DP}}(r, x) = \frac{\pi^2}{3}\alpha_s\, x\boldsymbol{g}\left(x, \frac{\lambda}{r^2}\right)\ \boldsymbol{r^2} + \mathcal{O}(r^4)$$

  $\sigma_{\mathrm{DP}}(r, x)$ zeigt „Farbtransparenz“ d.h. $\sigma_{\mathrm{DP}} \to 0$ für $r \to 0$, **Anstieg** mit der Fläche $\pi \boldsymbol{r^2}$ des Dipols.

- **Erwartung**: Wenn r oberhalb der Saturationsskala $R_{\mathrm{Sat}}(x) \sim \frac{1}{Q_{\mathrm{Sat}}(x)}$, Anstieg in r flacht aus und σ_{DP} strebt konstantem Grenzwert zu

- Sehr erfolgreiche, ökonomische Modelle mit Saturation, z.B. [Golec-Biernat & Wüsthoff, '99], beschreiben die exp. Daten äußerst effizient.

– Saturation:

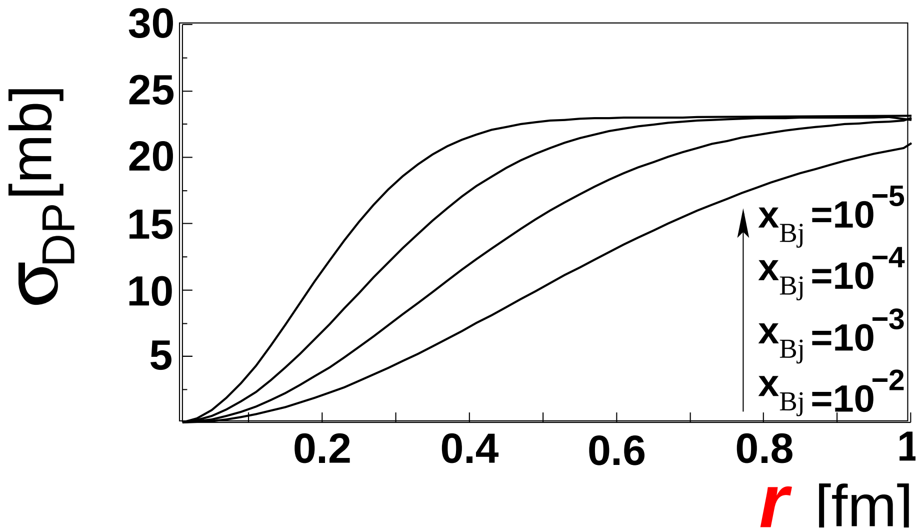
$$\sigma_{\mathrm{DP}} \overset{r \gtrsim 0.5\ \mathrm{fermi}}{\Rightarrow} \textbf{konstant}$$

– „Farbtransparenz“:

$$\sigma_{\mathrm{DP}} \overset{r\to 0}{\propto} \pi\, \boldsymbol{r^2}$$

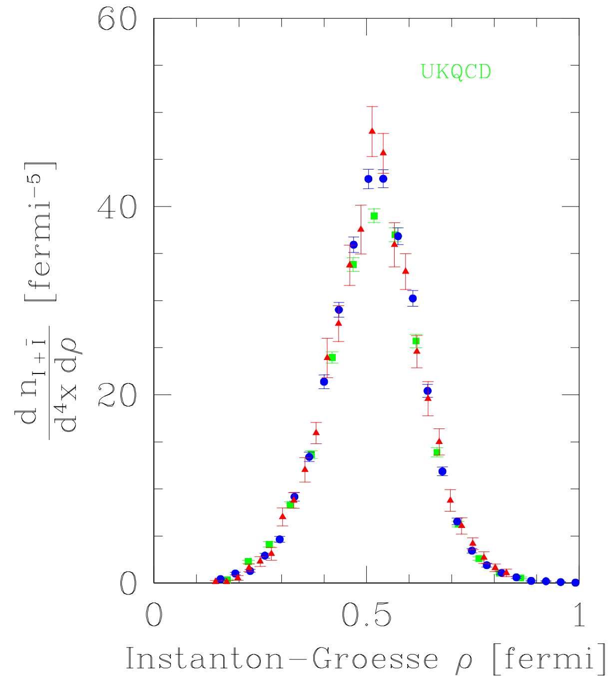
QCD -Störungstheorie:

[Low, '75; Nikolaev & Zakharov, '90]



2.5 Von I-Störungstheorie zur Saturation

Strategie **Instanton**-Zugang: **zwei** Größen mit Dimension $[l]$:



◇ Transversale Ausdehnung des $q\bar{q}$-Farbdipols: $\boldsymbol{r}$

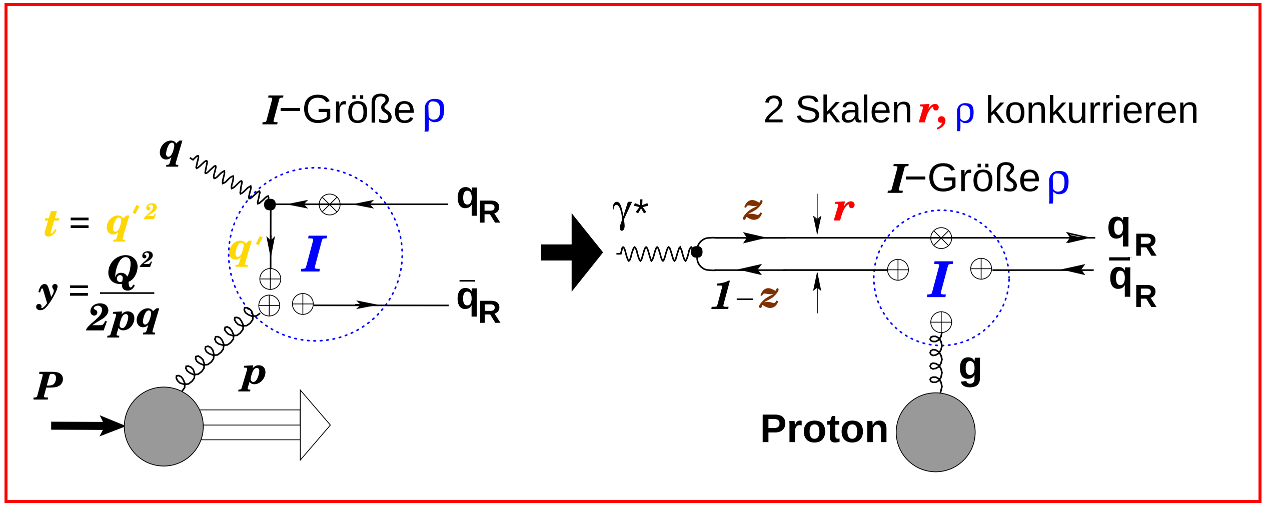
◇ Scharf-definierte Ausdehnung des Instantons im Hintergrund:
$\langle\rho\rangle \approx 0.5$ fermi $\Leftarrow$ **Gittersimulationen** (Fig.)

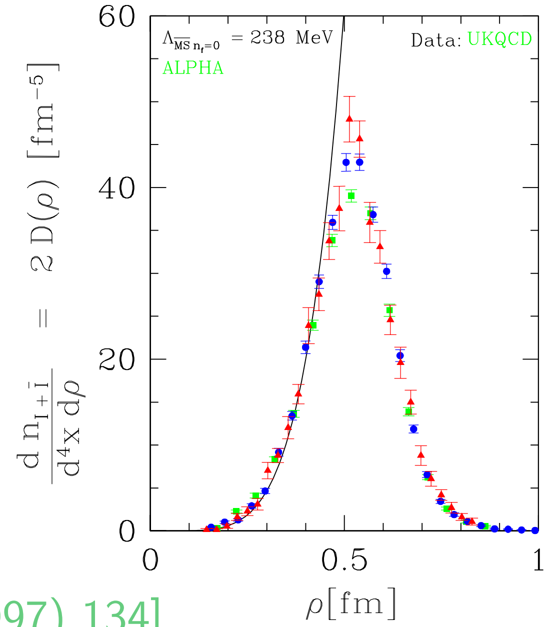
- **Frage:** „Saturierende" geometrische Form?

$$\begin{array}{llllll} \boldsymbol{r} \gtrsim \langle\rho\rangle & : & \sigma_{\rm DP}{}^{(I)}(r,\ldots) & \sim & \pi\langle\rho\rangle^2 & \propto \text{ Fläche des \textbf{Instantons}, während für} \\ \boldsymbol{r} \lesssim \langle\rho\rangle & : & \sigma_{\rm DP}{}^{(I)}(r,\ldots) & \sim & \pi\boldsymbol{r^2} & \propto \text{ Fläche des \textbf{Farbdipols}} \end{array}$$

- Start: Große Q^2 & Schnitte $\Rightarrow$ I-Störungstheorie strikt gültig $\Rightarrow$
- Transformation unserer Resultate für I-induzierte, **tiefunelastische** eP **Prozesse** [Moch, Ringwald & Schrempp, Nucl. Phys. **B** '97; Ringwald & Schrempp, Phys. Lett. **B** '98], ins Farbdipol Bild
- Vorsichtige Erhöhung der Farbdipol-Größe $\boldsymbol{r}$ in Richtung hadronischer Dimensionen mit Hilfe von **Gitterersimulationen** $\xrightarrow{\text{Gitter}}$ Beschränkungen/Schnitte überflüssig!

- $\boxed{\text{Einfachster, } I\text{-induzierter Prozeß } \gamma^* + g \overset{(I)}{\Rightarrow} q_{\rm R} + \overline{q}_{\rm R}}$





◇ **Ausgangspunkt:** [Moch, Ringwald & Schrempp, Nucl. Phys. **B507** (1997) 134]

$$\sigma_{L,T}^{\gamma^* P}(x, \mathcal{Q}^2) = \int_x^1 \frac{dy}{y} \left(\frac{x}{y}\right) \boldsymbol{g}\left(\frac{x}{y}, \mu^2\right) \int d\,t\, \frac{d\hat\sigma_{L,T}^{\gamma^* g}}{d\,t}(y, t, \mathcal{Q}^2)$$

$\mathcal{Q}^2 = \{Q^2, -t, -u\}$ "groß": z.B. $\boxed{\frac{d\,\hat\sigma_L^{\gamma^* g}}{d\,t} \overset{(I)}{=} \frac{\pi^7}{2} \frac{e_q^2}{Q^2} \frac{\alpha_{\rm em}}{\alpha_s} \left[y(1-y)\sqrt{tu}\,\frac{\mathcal{R}(\sqrt{-t}) - \mathcal{R}(Q)}{Q^2 + t} - (t \leftrightarrow u)\right]^2}$

◇ Integral $\mathcal{R}(\mathcal{Q}) = \int_0^\infty d\rho\, D(\rho)\rho^5\, (\mathcal{Q}\rho)\mathrm{K}_1(\mathcal{Q}\rho)$ Schlüssel zur Fortsetzung zu kleineren $\mathcal{Q}$

◇ In I-Störungstheorie, I-**Größenverteilung**, $D(\rho) = D_{I\text{-pert.}}(\rho) \propto \rho^{6-\frac{2}{3}n_f}$, bekannt ['t Hooft '76] aber nur gültig für $\rho \lesssim 0.35$ fm (Fig. rechts). $\mathcal{R}(\mathcal{Q})$ formal divergent für $\mathcal{Q} \Rightarrow 0$!

◇ Für hinreichend große $\mathcal{Q}$ unterdrückt $(\mathcal{Q}\rho)\mathrm{K}_1(\mathcal{Q}\rho) \sim e^{-\mathcal{Q}\rho}$ große Instantonen
$\Rightarrow \mathcal{R}(\mathcal{Q})$ endlich und $\boldsymbol{I}$-Störungstheorie anwendbar!

◇ **Strategie:** $D_{I\text{-pert.}} \Rightarrow D_{\text{Gitter}} \Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{R}(0) = \int_0^\infty d\rho \; D_{\mathrm{Gitter}}(\rho)\rho^5 \approx 0.3 \text{ fermi} \quad \textbf{endlich}}$

◇ Mit Variablentransformation
und 2d-Fouriertransformation $\boxed{(y, t)} \Leftrightarrow \boxed{(z, \boldsymbol{r})}$,

- erhält man Darstellung entsprechend dem Farbdipol Bild:

$$\boxed{\int_x^1 \frac{d\,y}{y}\{\ldots\} \int dt \; \frac{d\hat{\sigma}_{L,T}^{\gamma^* g}}{dt} \Rightarrow \int dz \int d^2\boldsymbol{r} \; \left(\left|\Psi_{L,T}\right|^2 \sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}\right)}$$

- Wie intuitiv erwartet, **Wechselspiel** von r & $\rho \approx \langle\rho\rangle \approx 0.5$ fermi :

  (mit $\hat{Q} = \sqrt{z(1-z)}\,Q$)

$$\text{z.B.} \quad \left(|\Psi_L|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)} \approx |\,\Psi_L^{\rm pQCD}\,(z,r)\,|^2\,\frac{1}{\alpha_{\rm s}}\,x\,\boldsymbol{g}(x,\mu^2)\,\frac{\pi^8}{12}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty d\rho D_{\rm Gitter}(\rho)\,\rho^5\left(\frac{-\frac{d}{dr^2}\left(2r^2\frac{\mathrm{K}_1(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z})}{\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}}\right)}{\mathrm{K}_0(\hat{Q}r)}-(z\leftrightarrow 1-z)\right)\right\}^2,$$

- Mit $-\frac{d}{dr^2}\left(2r^2\frac{K_1\left(\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}\right)}{\hat{Q}\sqrt{r^2+\rho^2/z}}\right) \approx \begin{cases} -\frac{K_1\left(Q\rho\sqrt{1-z}\right)}{Q\rho\sqrt{1-z}} & \text{für} \quad \frac{r^2}{\rho^2/z} \ll 1 \\ K_0\left(\hat{Q}r\right) & \text{für} \quad \frac{r^2}{\rho^2/z} \gg 1 \end{cases}$

  ergibt sich für die Grenzwerte (wähle den dominanten Fall $z \gg 1-z$)

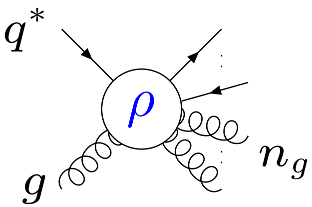
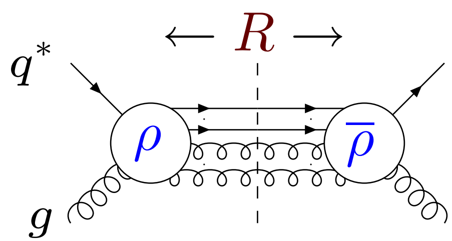
$\frac{r^2}{\langle\rho\rangle^2} \ll$ **1**: $\quad \left(|\,\Psi_{L,T}\,|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)} = \mathcal{O}(1)$ aber **winzig** (in pQCD :$\left(|\Psi_L|^2 + |\Psi_T|^2\right)\sigma_{\rm DP} = \mathcal{O}(1)$)

$\frac{r^2}{\langle\rho\rangle^2} \gg$ **1**: $\quad \left(|\,\Psi_{L,T}\,|^2\,\sigma_{\rm DP}\right)^{(I)} \approx |\,\Psi_{L,T}^{\rm pQCD}\,|^2\,\underbrace{\frac{1}{\alpha_s}\,x\,\boldsymbol{g}(x,\mu^2)\,\frac{\pi^8}{12}\left(\int_0^\infty d\rho D_{\rm Gitter}(\rho)\rho^5\right)^2}_{\sigma_{\rm DP}^{(I)}\ \text{„saturiert“}}$

- **Realistischer Prozess:** $\gamma^* + g \overset{(I)}{\Rightarrow} n_f\,(q_{\rm R} + \overline{q}_{\rm R}) +$ **Gluonen**

◇ I-Dynamik im I-induzierten Subprozeß
$q^*(q') + g(p) \xrightarrow{(I)} X$ (offshell-Quark q^* aus Photon Dissoziation $\gamma \to \overline{q} + q^*$)

◇ **Summation der Endzustandsgluonen** mittels optischem Theorem $\Rightarrow$
Valley-Methode [Balitsky & Yung '86]

$$\sum_{n_g} \Bigg|$$

$$\Bigg|^2 + (I \leftrightarrow \bar{I}) \approx 2$$


◇ **Variablen:** Energie: $E = \sqrt{(q' + p)^2}$, q^*-Virtualität: $Q'^{\,2} = -q'^{\,2}$

◇ Behandlung der resummierten Endzustandsgluonen in Form einer Wechselwirkung zwischen Instantonen und Antiinstantonen:

Weiterer, wichtiger Baustein des I-Kalküls: $I\bar{I}$-**Wechselwirkung** $\Omega^{I\bar{I}}_{\rm Valley}(R,\ldots)$:

$-1 \leq \Omega^{I\bar{I}}_{\rm Valley}(R,\ldots) \leq 0$, analytisch bekannt! [Khoze & Ringwald '91; Verbaarschot'91]

I-**Störungstheorie:** formal gültig für $\sqrt{R^2} \gg \sqrt{\rho\overline{\rho}}$

Valley Methode könnte viel weiter gelten, typisch bis I und $\bar{I}$ sich berühren?
$\Leftrightarrow\ \Omega^{I\bar{I}}_{\rm Valley} \approx -\frac{1}{2}$ oder $\sqrt{R^2} \approx \sqrt{\rho\overline{\rho}}\ \Leftarrow$ **Gittersimulationen!**

◇ **Saturation?** **Strategie** analog zum "einfachsten Prozeß"

Ausgangspunkt: $\boldsymbol{I}$-Störungstheorie $\oplus$ **Valley**-Methode [Ringwald & F. Sch., '98], E klein

◇ $\sigma_{\text{DP}}^{(I)\,\text{Gluonen}}$ involviert nun zusätzliche Integrationen über $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{R_\mu} \Leftarrow$ **Gluonen**:

– Im interessanten Bereich weicherer Impulsüberträge Q'^2 gilt $\rho \approx \langle\rho\rangle$ und R_μ-Integral dominiert durch **Sattelpunkt** $R_\mu^*(\frac{E}{M_{\text{Sph}}})$!

– Masse M_{Sph} des **QCD -Sphalerons** als Skala für die I-Subprozess Energie E!

– $M_{\text{Sph}} \equiv$ Höhe der Potentialbarriere zwischen benachbarten QCD -Vacua mit $|\Delta n| = 1$:

$M_{\text{Sph}} \approx \frac{3\pi}{4}\frac{1}{\alpha_s}\frac{1}{\langle\rho\rangle} \approx 2-3$ GeV [Ringwald & F. Sch. '94; Diakonov & Petrov '94]

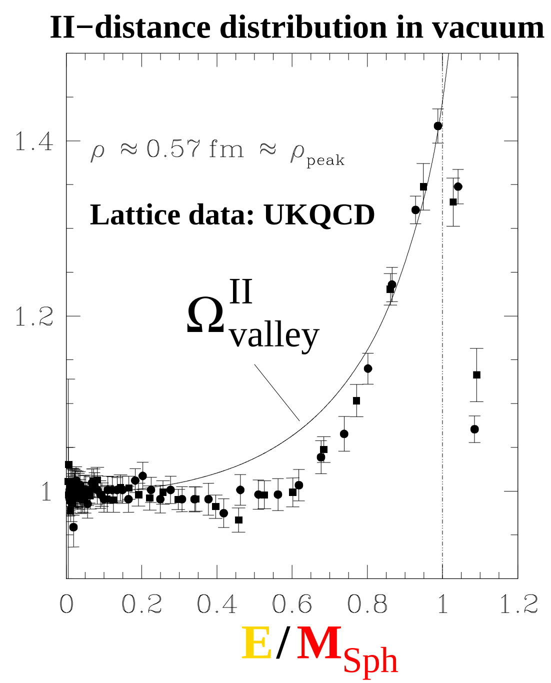
• Auf **Gitter** simuliert: **Verteilung** des $I\bar{I}$-**Abstands:** $\frac{\sqrt{\boldsymbol{R^2}}}{\langle\rho\rangle}$

$\frac{d\,n^{(I\bar{I})}}{d^4x_0\,d^4R} \Leftrightarrow \left\langle \exp\left\{-\frac{4\pi}{\alpha_s}\,\Omega^{I\bar{I}}\right\}\right\rangle_{U,\rho,\bar{\rho}}$ [**UKQCD**, Ringwald & F. Sch. '99]

– **Sattelpunkt** $\Rightarrow \frac{\sqrt{\boldsymbol{R^2}}}{\langle\rho\rangle} \Leftrightarrow \frac{E}{M_{\text{Sph}}}$

– **Maximum bei** $\boldsymbol{E} \approx M_{\text{Sph}}$

– $\Omega^{I\bar{I}}_{\text{Valley}}$ gültig bis zum **QCD -Sphaleron**



- Mit Endzustands-**Gluonen**: E, R_μ-Integrale dominiert durch QCD -**Sphaleron** Peak, und

$$\Rightarrow \ \sigma_{\mathsf{DP}}^{(I)\,\mathbf{Gluonen}} \overset{r\to\infty}{\propto} \pi \left(\int d\rho \; D_{\mathsf{Gitter}}(\rho)\rho^5 \right)^2 = \pi \mathcal{R}(0)^2$$

- sodaß der **Saturations**-Grenzwert des "Farbglas"-Kondensats dem **QCD - Sphaleron** entspricht, einem klassischen, kohärenten Multi-Gluon Zustand!

3. Zusammenfassung

- Der bei **HERA** entdeckte starke Anstieg der Gluondichte für kleine Bjorken-x, machte ein neuartiges, hochinteressantes Regime der QCD zugänglich

- Trotz $\alpha_s \ll 1$ stößt die QCD -Störungstheorie hier an ihre Grenzen. Nicht-perturbative, klassische Ansätze starker Gluonfelder mit hoher Besetzungszahl im Saturationsgrenzwert vielversprechend: **Instantonen**.

- Farbdipol-Bild als intuitiver Rahmen beim Studium des Saturationsproblems

- Ergebnisse des Instantonzugangs: **Saturation** im Instanton-Hintergrund!
  - ◇ Saturationsskala $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{Sat}} \sim \frac{1}{\langle\boldsymbol{\rho}\rangle}$, mit $\langle\rho\rangle$ = charakteristische **Instanton-Größe** ~ 0.5 **fermi**
  - ◇ Mit anwachsender Farbdipolgröße $\boldsymbol{r} \gtrsim \langle\rho\rangle$ strebt $\sigma_{\mathrm{DP}}^{(I)}(r,\ldots)$ gegen einen konstanten Wert, proportional der Fläche $\pi\langle\rho\rangle^2$ des Instantons im Hintergrund!
  - ◇ "Farbtransparenz" $\propto \pi r^2$ (Dipolfläche) für $r \to 0$, analog QCD -Störungstheorie.
  - ◇ "Farbglas-Kondensat" $\Leftrightarrow$ **QCD-Sphaleron**, kohärenter klassischer Multi-Gluonzustand!

- **Offen & interessant:** x-Abhängigkeit der Saturationsskala $Q_{\mathrm{Sat}}(x)$?