STATISTIK IM ALLTAG

Wie der Zufall spielt?

Volker Blobel

Inst. für Experimentalphysik, Hamburg

19.11.2002

Ringvorlesung

Was sagt das Brockhaus-Lexikon über *Statistik* und *Zufall*?

Die **Statistik** „befaßt sich mit der Gewinnung und Auswertung quantitativer Informationen von *zufälligen* Erscheinungen der realen Welt aufgrund von Beobachtungen oder Erhebungen und bedient sich dabei v.a. der Wahrscheinlichkeitstheorie.“

Zufall ist „das, was ohne erkennbaren Grund und ohne Absicht geschieht, das Mögliche, das eintreten kann, aber nicht eintreten muß.“

Statistik und Statistiken

Erste überlieferte statistische Erhebung wurde um 3050 v.Chr. in Ägypten durchgeführt, und in der römischen Kaiserzeit fanden mehrfach Volkszählungen statt.

Heute: die Statistik im Sinne von allgemeiner Datenerfassung und -auswertung ist heute in allen Disziplinen verbreitet und wird von nationalen (Statistische Bundesamt) und internationalen Einrichtungen betrieben.

Nicht selten ist die Darstellung und Interpretation von statistischen Material Gegenstand heftiger Erörterungen und kontroverser Diskussionen (Stichwort PISA).

Zufälligkeit und Willkürlichkeit

Statistische Experimente, die mehrfach in gleicher Weise wiederholt werden, haben unterschiedliche Ergebnisse, und lassen zunächst keine Gesetzmäßigkeit erkennen. Ursachen lassen sich nicht ergründen. Ausweg?

Glaube an eine unerforschliche oder göttliche Macht, die bestimmend von außen in das irdische Geschehen eingreift?

Gibt es verborgene physikalische Parameter?

Statistik und Wahrscheinlichkeit – historische Entwicklung

Pascal und Fermat formalisierten im 17. Jahrhundert die Vorstellungen von Zufall und Wahrscheinlichkeit, um bestimmte Probleme des Glücksspiels zu lösen: auch der Zufall folgt Gesetzen!

Im gleichen Jahrhundert wurde durch Galilei, Kepler und Newton die Grundlage der modernen Physik gelegt.

Weiterentwicklung der Statistik für wissenschaftliche Zwecke durch Laplace und Gauß, und Entwicklung der Statistischen Physik (Maxwell, Boltzmann).

Verwendung der Statistik im 19. Jahrhundert für das Verständnis sozialer Phänomene und ihrer Regelmäßigkeiten.

Entwicklung der Statistik und Physik seit dem 17. Jahrhundert

Physik:	Galileo Galilei	1564 – 1642
	Johannes Kepler	1571 – 1630
	Isaac Newton	1643 – 1727
Statistik:	Pierre Simon de Fermat	1601 – 1655
	Blaise Pascal	1623 – 1662
	Christiaan Huygens	1629 – 1695
	Jakob Bernoulli	1654 – 1705
	Pierre Simon Laplace	1749 – 1827
	Karl Friedrich Gauss	1777 – 1855
Physik:	James Clerk Maxwell	1831 – 1879
	Ludwig Boltzmann	1844 – 1906

Kausalitätsprinzip und Zufall

I. Kant: „Alle Veränderungen geschehen nach dem Gesetz der Verknüpfung von Ursache und Wirkung“(Kritik der reinen Vernunft - 1781).

Laplace: „Es läßt sich eine Stufe der Naturerkenntnis denken, auf welcher alles Weltgeschehen durch *eine* mathematische Formel vorgestellt würde, durch *ein* unermeßliches System simultaner Differentialgleichungen, aus dem sich Ort, Bewegungsrichtung und Geschwindigkeit jedes Atoms im Weltall zu jeder Zeit ergäbe“.

Diese Vorstellung der Determiniertheit wurde durch die klassische Newtonsche Mechanik geprägt.

Mit der Entwicklung der Quantenmechanik um das Jahr 1925 ist diese Vorstellung der Determiniertheit nicht mehr möglich. Der Zustand eines Systems wird nicht durch die tatsächlichen Werte der beobachtbaren physikalischen Größen beschrieben, sondern es gibt Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Werte dieser Größen.

Literatur zum Thema

John Allen Paulos, *Es war 1mal . . . , Die verborgene mathematische Logik des Alltäglichen*, Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg · Berlin, 2000

Gero von Randow, *Das Ziegenproblem - Denken in Wahrscheinlichkeiten*. Rowohlt Hamburg, 1992

Hans-Peter Beck-Bornholdt und Hans-Herrmann Dubben, *Der Hund, der Eier legt – Erkennen von Fehlinformationen durch Querdenken*, Rowohlt Hamburg, 1997

Walter Krämer, *So lügt man mit Statistik*. Piper Verlag München, 2000

Wahrscheinlichkeit

Was ist Wahrscheinlichkeit? „Ein auf dem Zufallsversuch beruhender Grundbegriff der Wahrscheinlichkeitstheorie, der den Grad der Möglichkeit bzw. Voraussagbarkeit des Eintretens eines Ereignisses beschreibt“.

Mathematische Definition nicht einfach; es gibt keine exakte und gleichzeitig anschauliche Definition.

Ein Versuch wird betrachtet, der sich – im Prinzip – beliebig oft wiederholen läßt; eine bestimmte Eigenschaft A des Versuchsergebnisses wird betrachtet.

Wurf eines Würfels: die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf eines Würfels das Ergebnis DREI zu erhalten, ist

$$P = \frac{1}{6} \, .$$

D.h. *im Mittel* erhalten wir in 1/6 der Würfelversuche als Ergebnis eine DREI.

Erwartungswert

Der Versuch kann N mal ausgeführt werden, und wir erhalten dabei N_A mal das Ergebnis A. Das Verhältnis

$$V = \frac{\text{Zahl der Versuche mit Ergebnis } A}{\text{Gesamtzahl der Versuche}} = \frac{N_A}{N}$$

ist die empirisch bestimmte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

Wenn wir den Versuch oft ausführen, wird sich dieser Wert dem Zahlenwert $P = 1/6$ annähern, und im praktisch nicht erreichbaren Grenzfall von unendlich vielen Versuchen werden wir genau 1/6 erhalten.

Für die Zufallsvariable V ist P der Erwartungswert, und der Erwartungswert von N_A ist $N \cdot P$:

$$\langle V \rangle = \left\langle \frac{N_A}{N} \right\rangle = P \qquad \text{oder} \qquad \langle N_A \rangle = N \cdot P = \mu$$

Die tatsächlichen Werte der Zufallsvariablen unterliegen statistische Schwankungen.

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Die Kombinatorik erlaubt oft eine einfache Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

Bei einem Versuch gibt es n unterscheidbare Ergebnisse, die alle *gleichwahrscheinlich* sind. Dann tritt jedes einzelne Ereignis A ein mit der Wahrscheinlichkeit

$$P = \frac{1}{n} \,.$$

(durch Abzählen). Aber was heißt *gleichwahrscheinlich*?

Bei einem Würfel mit sechs geometrisch gleichen Seitenflächen (und homogener Massenverteilung) wird jede der sechs Würfelzahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit $P = 1/6$ aufteten.

Wurf von drei Münzen

Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Wurf von drei Münzen genau 2mal Zahl (Z) und 1mal Wappen (W) zu bekommen, ist $P = 3/8$.

Dies ergibt sich durch Abzählen:

	ZZW	WWZ		
ZZZ	ZWZ	WZW	WWW	
	WZZ	ZWW		
1	3	3	1	$\sum = 8$

Wahrscheinlichkeit für Z und W bei 7 Münzwürfen

7Z 0W	6Z 1W	5Z 2W	4Z 3W	3Z 4W	2Z 5W	1Z 6W	0Z 7W	
		ZZZZZWW	ZZZZWWW	ZZZWWWW	ZZWWWWW			
		...	...	...	...			
	ZZZZZZW	...	...	...	...	ZWWWWWW		
	ZZZZZWZ	...	...	...	...	WZWWWWW		
	ZZZZWZZ	...	...	...	...	WWZWWWW		
ZZZZZZZ	ZZZWZZZ	...	...	...	...	WWWZWWW	WWWWWWW	
	ZZWZZZZ	...	...	...	...	WWWWZWW		
	ZWZZZZZ	...	...	...	...	WWWWWZW		
	WZZZZZZ	...	...	...	...	WWWWWWZ		
		...	...	...	...			
1	7	21	35	35	21	7	1	$\sum = 128$

Die Wahrscheinlichkeit, bei sieben Würfen einer Münze genau 2 mal Zahl(Z) zu bekommen, ist

$$P = 21/128 = 16.4\% \,.$$

Die Binomialverteilung

Ist p die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von Ereignis A bei *einem* Versuch, so ist die Wahrscheinlichkeit für das $N_A$malige Eintreten von A bei insgesamt N Versuchen gegeben durch

$$P_N(N_A) = \binom{N}{N_A} p^{N_A} (1-p)^{N-N_A} = \frac{N!}{N_A!\,(N-N_A)!} p^{N_A} (1-p)^{N-N_A}$$

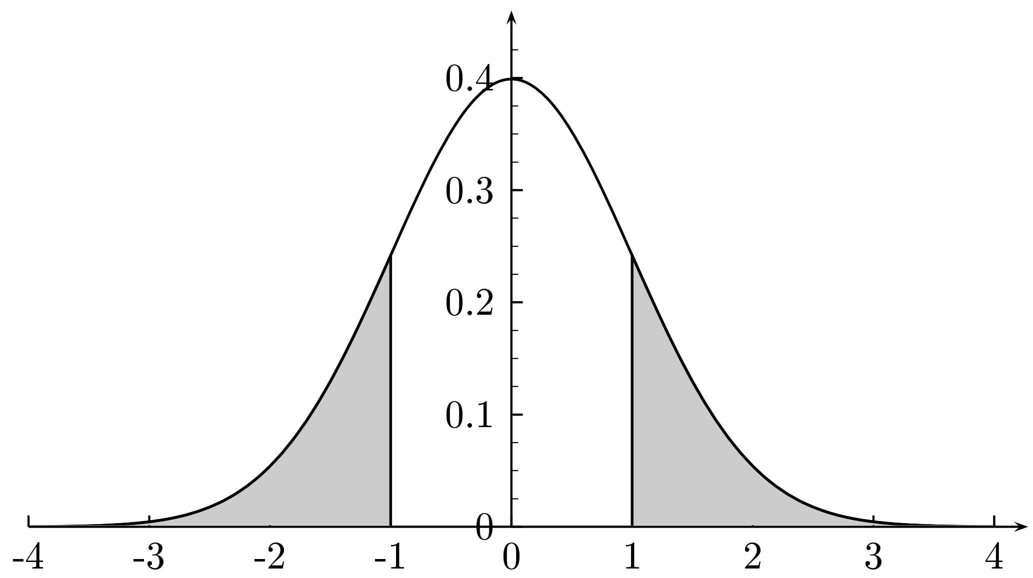
(ergibt sich rein mathematisch aus der Kombinatorik unter Verwendung der Binomialformel).

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}$.
(Maß für die statistischen Schwankungen).

Laplace: „Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist nichts anderes als gesunder Menschenverstand, in mathematische Form gebracht “.

Allerdings gibt es von Voltaire dazu die Aussage:
„Gesunder Menschenverstand ist nicht allzu weit verbreitet“.

Die Normal- oder Gauß-Verteilung



Die standardisierte Gauß-Verteilung (Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1$). Die graue Fläche zeigt die Wahrscheinlichkeit für $|x - \mu| \geq 1\sigma$; sie entspricht einer Wahrscheinlichkeit von 31.74 %.

Die Wahrscheinlichkeit für $|x - \mu| \geq 3\sigma$ ist 0.27 %.

Tod in den Bergen

In einem Buch über die bergsteigerischen Fähigkeiten von Reinhold Messner ist folgendes zu lesen:

„Wenn man bedenkt, daß die Wahrscheinlichkeit, bei einer Expedition auf einen Achttausender umzukommen, 3.4% beträgt, dann hatte Messner eine Wahrscheinlichkeit von

$$(3.4 \cdot 29) = 98.6\% \,, \qquad \text{falsch!}$$

bei seinen 29 Expeditionen umzukommen".

Was passiert bei der 30. Expedidion?

Wenn die einzelnen Expeditonen unabhängige Ereignisse darstellen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, alle 29 Expeditionen zu überleben, gegeben durch

$$P = (1 - 0.034)^{29} = 0.367 \,,$$

man muß also nicht ganz so pessimistisch sein wie die erste (falsche) Rechnung angibt.

Das Geburtstagsproblem

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben? Die Wahrscheinlichkeit P, daß zwei Personen *nicht* am gleichen Tag Geburtstag haben, ist gegeben durch

$$Q = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) = \frac{364}{365} = 1 - P \,.$$

Gruppe von 23 Personen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, daß mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Intuitiv: ist wohl ziemlich klein (einige %?).

Rechnung (für 23 Personen):

$$Q = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{22}{365}\right) = 1 - P \approx 50\%$$

$P(47 \text{ Personen}) = 95\%$ $\qquad$ $P(57 \text{ Personen}) = 99\%$

Das Bayes–Theorem

Berechnungen oder Abschätzungen statistischer Probleme verlangen ein gewisses Maß an Mathematik.

Beispiel: das nach Thomas Bayes (1702 – 1761) benannte Theorem.

Thomas Bayes, An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, *Philos. Trans. R.Soc.***53** (1763) 370. Nachgedruckt in Biometrika **45** (1958) 293.

Die Bellsucht – Canine Ovorhoe

Sie sind gut erholt aus dem Urlaub in einen exotischen, touristisch noch kaum erschlossenen Land zurückgekehrt. Nun erfahren sie, daß es dort eine seltene Krankheit gibt, die *Canine Ovorhoe*, auch *Bellsucht* genannt.

Ein Test ergibt ein positives Ergebnis!

Der Test liefert bei Erkrankten mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % ein positives und damit richtiges Ergebnis, also nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % ein falsches Ergebnis.

Von 100 Nichtinfizierten werden 98 auch als gesund erkannt und nur bei 2 von 100 hat der Test fälschlicherweise ein positives Resultat.

Die Bellsucht tritt bei jedem tausendsten Touristen aus dem exotischen Land auf.

Die weitere Abklärung erfordert einen größeren Aufwand mit Krankenhausaufenthalt und Vollnarkose.

Aus: Hans-Peter Beck-Bornholdt und Hans-Herrmann Dubben, Der Hund, der Eier legt – Erkennen von Fehlinformationen durch Querdenken, Rowohlt Hamburg, 1997

Bellsucht – Die Expertenmeinung

Läßt sich aus den angegebenen Zahlen die Wahrscheinlichkeit P für eine Erkrankung errechnen?

P für Erkrankung	Experten-Meinung
95 % und höher	11
etwa 50 %	2
etwa 5 %	1
2 %	1
1 %	0

Richtig ist P etwa 5 %; diese Wahrscheinlichkeit kann mit dem Bayes-Theorem berechnet werden.

A-priori und a-posteriori Wahrscheinlichkeiten

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

- $P(+|K) = 0.99$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Test positiv (+) ausfällt, wenn die Krankheit (K) tatsächlich vorliegt.
- $P(+|N) = 0.02$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Test positiv (+) bei Nicht-Erkrankung ausfällt.

Die a-priori Wahrscheinlichkeit (vor dem Test) für Krankheit $P(K) = 0.001$.

Was wollen wir wissen? Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(K|+)$, d.h. die Wahrscheinlichkeit für die Erkrankung, wenn der Test positiv (+) ausgefallen ist (a-posteriori Wahrscheinlichkeit).

Bayes-Theorem:

$$P(K|+) = \frac{P(+|K) \cdot P(K)}{P(+|K) \cdot P(K) + P(+|N) \cdot P(N)} = 0.0472 = 4.72\% \, .$$

Rechnung ohne explizite Benutzung des Theorems

Dem Test unterziehen sich 100 100 Touristen, davon sind etwa 100 wirklich krank.

Bei 99 der Kranken wird durch den Test die Bellsucht korrekt festgestellt.

Von den 100 000 Nichtinfizierten stuft der Test 2000 (oder 2 %) als erkrankt ein. Von den 2099 Touristen mit positivem Test sind also der Bruchteil $99/2099 = 0.0472$ tatsächlich erkrankt.

Eine Statistik über Studentenzahlen

Man sieht: schon bei relativ einfachen Problemen der Wahrscheinlichkeit ist mathematisches Verständnis erforderlich. Für Physiker gehört der Umgang mit Formeln zum täglichen Brot.

Wie sieht es aus mit der Akzeptanz der Mathematik in einem hochtechnisierten Land wie Deutschland?

Anzahl Studierender in einigen Studienfächern an der Universität Hamburg (Wintersemester 2001/2002)

Studienfach	Studierende (1. Fach)
Geschichtswissenschaften	1 466
Kulturwissenschaften	1 489
Orientalistik	1 374
Mathematik	746
Physik	959

Das Ziegenproblem – the Monty Hall Problem

Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet der Preis, ein Auto, hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten „Ich zeigen Ihnen mal was“ öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut in Publikum. Er fragt: „Bleiben Sie bei Nummer eins, oder wählen Sie die Nummer zwei?“.

Gero von Randow in der ZEIT, und Buch (1992).

Ziegenproblem – Die drei Türen

Ziegenproblem – die Lösung

Man verdoppelt die Chancen, ein Auto zu gewinnen, wenn man die andere Tür wählt.

Bei jeder Tür ist die Wahrscheinlichkeit eines Gewinns 1/3, wenn der Moderator keine Tür geöffnet hat:

$$P(\text{eins}) = 1/3 \qquad\qquad P(\text{zwei oder drei}) = 2/3$$

Wenn bei Tür drei mit Sicherheit eine Ziege ist (wie der Moderator zeigt), gilt die Wahrscheinlichkeit 2/3 für die Tür zwei.

Ziegenproblem – Leserbriefe

Der Redakteur wurde in Hunderten von Briefen, auch von Experten wie Institutsdirektoren, als Spinner und Dummkopf beschimpft.

Ein Leserbrief wird zitiert: *„In einem Drittel der Fälle fährt die Kandidatin gut mit der Strategie, an ihrer gewählten Tür festzuhalten. In zwei Dritteln der Fälle geht sie automatisch zum Gewinn über, wenn sie wechselt.“*.

Diese Formulierung ist nicht geglückt – die Kandidatin sollte immer wechseln.

Ziegenproblem – warum die Aufregung

Aus einer Kritik an der richtigen Lösung: „...der Irrtum ist einer der wohl verbreitetsten, wenn es um Probleme der Wahrscheinlichkeit geht: nämlich die Annahme, daß eliminierte Möglichkeiten noch immer die Wahrscheinlichkeiten der fortbestehenden Möglichkeiten beeinflussen“.

- Warum haben sich derart viele Leute getäuscht – noch dazu einschlägig ausgebildete?
- Wiese ließen sich viele von ihnen bis heute nicht überzeugen?
- Weshalb sind sie so wütend?

Die Strategie des Moderators muß klar definiert sein: er wählt natürlich eine Tür aus, hinter der eine Ziege ist, und bringt damit ein Plus an Information für die Kandidatin.

Die Methode von Buffon zur Bestimmung von π

Graf G.L.L. Buffon (1707 – 1788), Direktor des Jardin des plantes in Paris; Verfasser einer berühmten 44bändigen “ Histoire naturelle générale et particuliére”.

Eine Nadel der Länge ℓ wird in zufälliger Weise auf eine Fläche geworfen, die parallele Linien im Abstand D hat ($\ell \leq D$). Die Wahrscheinlichkeit, daß die Nadel *über* einer Linie liegt (Eigenschaft A), wird gemessen. Der Erwartungswert hängt von π ab:

$$\left\langle \frac{N_A}{N} \right\rangle = \frac{D}{\ell}\frac{2}{\pi} \qquad \pi_{\text{est}} = \frac{\ell}{D}\frac{2N}{N_A} \qquad \sigma_\pi \approx \frac{\ell}{D}\frac{2.37}{\sqrt{N}}$$

Dieser Zusammenhang erlaubt eine Bestimmung der Zahl π in einem Versuch:

Anzahl Versuche	Resultat	Abweichung
$n = 10^7$	$\pi = 3.139\,768 \pm 0.000\,749$	$+0.001\,824$
$n = 3 \times 10^8$	$\pi = 3.141\,582 \pm 0.000\,137$	$+0.000\,011$

Bericht eines Herrn Lazzarini (1901)

Das Experiment mit einer Nadel mit $\ell/D = 5/6$ wurde insgesamt 3408mal ausgeführt; er erhielt 1808mal den Kreuzungsfall und damit als Ergebnis den Wert

$$\pi_{\text{est}} = \frac{5}{6}\frac{2 \cdot 3408}{1808} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 71}{6 \cdot 16 \cdot 113} = \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$$

Verblüffend genau!?

Hier werden wir mistrauisch. Warum hatte er $\ell/D = 5/6$ und ausgerechnet die Anzahl $N = 3408$ gewählt und nicht eine runde Zahl. Die Zahl π wird bekanntermaßen sehr genau durch die rationale Zahl 355/113 angenähert und exakt dieses Ergebis hat er erzielt.

Die beobachtet Anzahl von 1808 Kreuzungen ist gerade optimal, und die Wahrscheinlichkeit, dieses Ergebnisses in einem Experiment zu erhalten ist nur 0.7 %. Er muss also wirklich großes Glück bei seinem Versuch gehabt haben.

Statistiken

Benjamin Disraeli: „There are three kind of lies: lies, damned lies, and statistics “.

Winston Churchill: „Ich glaube nur Statistiken, die ich selbst gefälscht habe “.

Elisabeth Noelle-Neumann: „Es ist mir noch heute rätselhaft, daß man herausbringt, was 60 Millionen Menschen denken, wenn man zweitausend Menschen befragt. Erklären kann ich das nicht. Es ist eben so “.

Einige Meldungen

„Fuhr vor einigen Jahren noch jeder zehnte Autofahrer zu schnell, so ist es heute jeder fünfte. Doch auch 5 % sind zu viele, und so wird weiter kontrolliert, und die Schnellfahrer haben zu zahlen“. [Badezeitung Norderney]

„Mehr Mörder als die Jenaer Polizei fängt niemand: 104.8 % aller Fälle von Mord, Mordversuch und Tötung klärten die Beamten 1993 auf“. [DIE WELT]

„Über 50 % der Verunglückten, die im Kantonsspital Chur behandelt wurden, kamen aus Deutschland“. [DER SPIEGEL] – Sind 80 % der Urlaubsgäste aus Deutschland?

„22.8 % aller Konkurse zwischen Juli 1995 und Juni 1997 werden auf schlechte Rechtsberatung zurückgeführt – eine Steigerung um 9.2 % in nur zwei Jahren“.

„Gestern war der wärmste 18. November seit dem Jahre 1867“.

Die Häufigkeit der Anfangsziffern

Bedfords Zahlengesetz: die Häufigkeit der Anfangsziffern in Zahlenmengen (Atomgewichte der Elemente, Baseball-Ergebnisse, Stromrechnungen auf den pazifischen Salomon-Inseln, Readers Digest, Steuererklärungen . . .) folgt der Häufigkeit (DER SPIEGEL vom 16. 11. 98):

Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Wahrscheinlichkeit in %	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

Plausibel? Die erste Ziffer 1 geht von 1000. . . bis 1999. . . (Steigerung um Faktor 2), die 9 als erste Ziffer nur von 9000. . . bis 9999. . . (Steigerung um ≈ 10%).

Welche mathematische Formel hat Bedford dieser Häufigkeitstabelle zugrunde gelegt?

$$P(z) = \log(z + 1) - \log(z)$$

Bedfords Zahlengesetz

Test mit 41 Zahlen einer Tabelle von Naturkonstanten:

Ziffer	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl	12	6	4	1	4	6	0	3	5
$P(z)$ in %	29	15	9	2	9	15	0	7	12
$P(z)$ nach Bedford in %	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

Auch die vielen Zahlen in Steuererklärungen und Bilanzen folgen normalerweise dem Gesetz, allerdings nicht, wenn die Zahlen *gefälscht* sind.

Laut SPIEGEL kann die Bedford-Regel zur Vorprüfung von Steuererklärungen benutzt werden.

Murphys Law

Murphy: *„was schiefgehen kann, geht gewöhnlich auch schief "*.

Manche ergänzen *„. . . zum ungünstigsten Zeitpunkt"*.

- Ein Butterbrot, das einem aus der Hand fällt, fällt i.a. auf die Butterseite;
- die Kassenschlange im Supermarkt, an der man ansteht, ist die langsamste von allen.

Murphys Law klingt nett und ironisch: es beschreibt eine Konsequenz der Komplexität von Systemen und ist nicht-trivial.

Das Socken-Problem

Angenommen man besitzt zehn Paar Socken, von denen sechs Socken verschwinden.

Wenn man Glück hat, verbleiben sieben komplette Sockenpaare.

Wenn man *großes* Pech hat, verschwinden die sechs Socken aus verschiedenen Paaren und es verbleiben nur vier komplette Paare.

Ergebnis der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Kombinatorik:

	4 Paare	5 Paare	6 Paare	7 Paare
Wahrscheinlichkeit =	0.347	0.520	0.130	0.003

Haben Socken den Hang, ihre Gegenstücke zu verlieren?

Man erkennt, das 7 komplette Paare mit 0.003 (d.h. 0,3 %) sehr unwahrscheinlich sind, und daß die Wahrscheinlichkeit für die minimale Zahl von 4 kompletten Paaren über 100 mal so wahrscheinlich ist.

Das Wartezeit-Paradox

Man geht zu einer Bushaltestelle, um den nächsten Bus zu nehmen. Wenn man zu einer beliebigen Zeit bei der Bushaltestelle ankommt und der Bus alle 10 Minuten fährt, erwartet man eine Wartezeit von durchschnittlich 5 Minuten.

Man hat aber bei solchen Situationen den Eindruck, daß man im Mittel doch länger als 5 Minuten auf den Bus warten muss – Pech im Alltag?

Wenn die Busse nicht ganz gleichmäßig fahren, ist die mittlere Wartezeit länger. Wenn der Abstand der Busse einmal 5 Minuten und dann 15 Minuten beträgt, dann ist die mittlere Wartezeit

$$1/4 \cdot 2.5 + 3/4 \cdot 7.5 = \text{6.25 Minuten}$$

Die Poisson-Verteilung

Bei der Binomialverteilung war der Erwartungswert (Mittelwert) von N_A gegeben durch $\mu = N \cdot p$.

Für sehr kleine Werte von p ($p \ll 1$) und sehr große Werte von N ($N \gg 1$) kann man die Binomialverteilung vereinfachen; sie wird zur Poisson-Verteilung für Zählvorgänge:

$$P_\mu(N_A) = \frac{\mu^{N_A} \cdot e^{-\mu}}{N_A!} \qquad \sigma = \sqrt{\mu}$$

(die Werte von p und N treten nicht auf, nur noch $\mu = N \cdot p$).
Die Streuung ist bereits durch den Mittelwert bestimmt.

Beispiele für die Poisson-Verteilung

- Anzahl radioaktiver Atomkerne, die in 1 Minute zerfallen.
- Anzahl Telefonanrufe am (normalen) Wochenende.
- Anzahl PKWs auf der Köhlbrandbrücke zwischen 14 und 15 Uhr.
- Anzahl Kartoffeln im 10 kg Sack.
- Anzahl Tore an Bundesliga-Spieltag.
- Anzahl Druckfehler pro Seite im Buch.
- Anzahl Rosinen in einem Kuchenstück.

Die Wahrscheinlichkeiten für N_A bei Mittelwert $\mu = 1$:

$N_A =$	0	1	2	3	4	5
$P(N_A) =$	36.8 %	36.8 %	18.4 %	6.1 %	1.5 %	0.3 %

Wichtige Eigenschaft: Die Streuung ist bereits durch den Mittelwert bestimmt.

Unfallstatistik

Zeitung: „Zahl der Unfälle um 2 % zurückgegangen".

(641 Unfälle im vergangenen Zeitraum, Zeitraum davor 655 Unfälle).

Hat sich die Sicherheit signifikant erhöht? Nein!

Nach der Poisson-Statistik ist die mittlere Schwankung (Standardabweichung σ) etwa $\sigma = \sqrt{655} = 26$. Der Unterschied der beiden Zahlen ist nur die Hälfte davon – also vermutlich eine statistische Fluktuation. Die Verkehrssicherheit ist wohl unverändert.

Physiker verlangen i.a. drei und mehr Standardabweichungen zur Anerkennung einer signifikanten Abweichung.

Lotto, Roulette, Fußballtoto

Lotto: es gibt für die Wahl von 6 aus 49 Zahlen

$$n = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$$

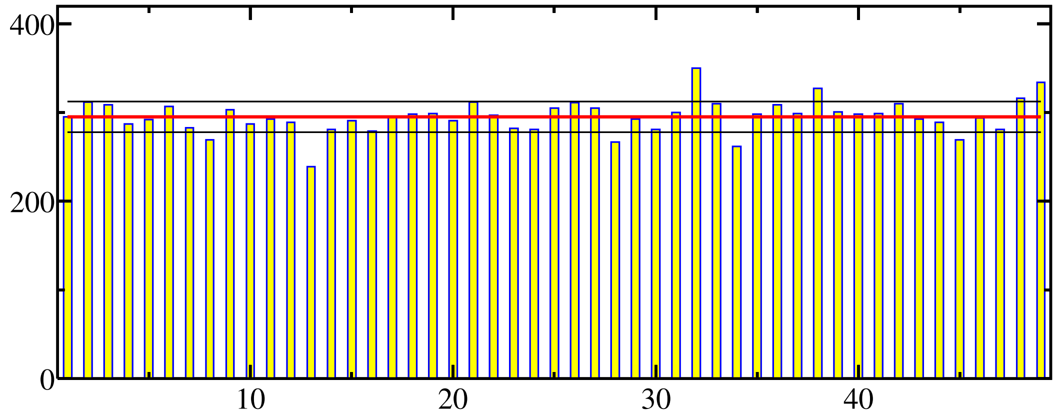
Möglichkeiten, und daher ist die Wahrscheinlichkeit für Zahlenreihe $1/n = 1/13\,983\,816 = 0.000\,000\,072$. Laut Statistischen Bundesamt ist die Wahrscheinlichkeit, vom Blitz erschlagen zu werden, 4mal so groß.

Bundesweit wurden im letzten Jahr für das Lotto rund acht Milliarden Euro ausgegeben. Etwa 200 Millionen davon sind Bearbeitungsgebühren. Ausgeschüttet werden 50 % der Einnahmen.

Die Reihe 15-20-27-30-42-48 gab es am 20.12.1986 (Sa) und am 21.6.2003 (Mi).

Sind Lottozahlen zufällig?

Die Häufigkeit des Auftretens der Zahlen 1 bis 49 im deutschen Samstagslotto aus 2412 Ziehungen von 1955 bis 2001 (die mittlere rote Linie gibt den Mittelwert $2412 \cdot 6/49 = 295.3$ für eine Zahl an, die schwarzen Linien die Abweichungen von einer Standardabweichung):



Am seltensten, nämlich nur 239mal, kommt die Zahl 13 vor. Dies entspricht -3.3 Standardabweichungen σ.

Gibt es geübte Lottospieler?

- Geburtstage sind beliebt, daher kommt die Zahl 19 besonders oft vor, und auch Zahlen bis 31 bzw. bis 12. Die Zahlen 4 und 9 sind beliebt, unbeliebt sind 16, 40, und 41.
- Zahlen am Rand des Scheins werden gemieden, jedoch sind *Muster* beliebt.
- Benachbarte Zahlen werden selten angekreuzt.

Zur Erhöhung möglicher Quoten sollte man Zahlen *entgegen* den üblichen Gewohnheiten ankreuzen.

Fußballtoto – gewinnen Experten?

Spiel zweier gleichwertiger Mannschaften, die im Mittel ein Tor schießen – die Poisson-Verteilung ergibt folgende Ergebnisse:

Ergebnis	Wahrsch.
1 : 0	14 %
2 : 0	7 %
2 : 1	7 %
3 : 0	2 %
3 : 1	2 %
3 : 2	1 %
4 : 0	0.7 %
4 : 1	0.7 %
4 : 2	0.4 %
4 : 3	0.1 %

Ergebnis	Wahrsch.
0 : 0	14 %
1 : 1	14 %
2 : 2	3 %
3 : 3	0.4 %
4 : 4	0.04 %

Ergebnis	Wahrsch.
0 : 1	14 %
0 : 2	7 %
1 : 2	7 %
0 : 3	2 %
1 : 3	2 %
2 : 3	1 %
0 : 4	0.7 %
1 : 4	0.7 %
2 : 4	0.4 %
3 : 4	0.1 %

Wenn in der Zeitung steht, daß eine Mannschaft nach vielen Niederlagen nun mit einem 1:0 Sieg gezeigt hat, daß sie ihre Krise bewältigt hat (die *schwarze* Serie ist beendet; der Trainer, der kurz vor dem Herauswurf stand, ist erst einmal gerettet), so erscheint diese Aussage nach der Statistik zweifelhaft.

Der Zufall spielt in jedem Fall eine sehr wichtige Rolle im Fußball, sonst gäbe es ja kein Fußball-Toto. Wie es ein Spieler nach einer Niederlage ausdrückte: *„Erst hatten wir kein Glück, und dann kam auch noch Pech dazu.“*

Fußball

„Von der Wahrscheinlichkeitsrechnung her wird das eine oder andere Tor fallen.“ [Christof Daum, Fußballtrainer]

Darf man bei einem 1:0 Ergebnis folgern, daß die Mannschaften nahezu gleichwertig sind? – Nein!

Wenn eine *gute* Mannschaft eine *schlechte* Mannschaft mit 1:0 besiegt, mag es sein, daß die gute Mannschaft sich nach einem schnellen Führungstreffer für kommende schwerere Spiele geschont und, mit Erfolg, auf ihre Routine zur Verhinderung eines Gegentores vertraut hat.

Das kann auch anders ausgehen, wie ein Spieler bekennt:
„Wir wollten unbedingt ein Gegentor vermeiden. Das hat auch gut geklappt – bis zum Gegentor.“.

Roulette

Es gibt Zahlen 0, 1, 2 bis 36. Bei einem Spiel gewinnt die Bank nur $1/37 = 2.7\%$ (viel günstiger als Lotto). Bei 25 Einsetzen hat man dann aber auch im Mittel 50 % verloren.

„Die 14 war schon lange nicht dran. Dann setzen wir auf die 14, denn bald ist der statistische Ausgleich fällig“. So geht es nicht!

Roulette nach dem System „Martingale“. Man beginnt mit 1 Euro (z.B. auf *Rouge*). Bei Verlust wird der Einsatz verdoppelt bis zum Gewinn, nach dem man 1 Euro gewonnen hat; man beginnt dann wieder mit 1 Euro.

Schlußworte

„Gepriesen sei der Zufall, er ist wenigstens nicht ungerecht“. [Ludwig Marcuse]

„Das Gewebe dieser Welt ist aus Notwendigkeit und Zufall gebildet; die Vernunft des Menschen stellt sich zwischen beide und weiß sie zu beherrschen.; sie behandelt das Notwendige als den Grund des Daseins; das Zufällige weiß sie zu lenken, zu leiten und zu nutzen, ...“. [Johann Wolfgang von Goethe, Wilhelms Meisters Lehrjahre]

Inhalt