ÜBUNGSBLATT 9 ZU
THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Abgabetermin: 11.1.2016 vor den Übungen

1. (8 Punkte) Betrachten Sie die kanonische Verteilung bei Temperatur T eines idealen Gases von Teilchen der Masse m, die auch als *Maxwell-Verteilung* bekannt ist.

   a) Berechnen Sie den thermischen Mittelwert $\langle v^n \rangle$ der $n-$ten Potenz des Betrages der Geschwindigkeit eines Teilchens für $n \in \mathbb{N}$.

   b) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsfluktuation $\langle (v - \langle v \rangle)^2 \rangle$.

   c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der kinetischen Energie der Teilchen an.

   d) Die Teilchen sollen nun zusätzlich Rotationsfreiheitsgrade mit Trägheitsmomenten I_1, I_2 und I_3 um die drei Hauptachsen haben. Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die zugehörigen drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit und des Drehimpulses an.

2. (6 Punkte) Der Hamiltonian eines $N-$Teilchensystems habe die Form

$$H(p_\nu, q_\nu) = K(p_\nu) + V(q_\nu)\,,$$

   wobei $K(p_\nu)$ eine homogene Funktion zweiter Ordnung in den Impulsen p_ν und $V(q_\nu)$ eine homogene Funktion $k-$ter Ordnung in den Koordinaten q_ν sei, d.h. $K(\lambda p_\nu) = \lambda^2 K(p_\nu)$ und $V(\lambda q_\nu) = \lambda^k V(q_\nu)$ für einen beliebigen Re-skalierungsfaktor λ. Bestimmen Sie die Form der freie Energie $F(T, V, N)$ als Funktion von T, V und N bis auf eine unbekannte Funktion einer Variablen. Hinweis: Überlegen Sie wie sich die Zustandssumme unter Re-skalierung von T, V und N verhalten muss.

   bitte wenden

3. (3 Punkte) Drücken Sie folgende Erwartungswerte von Fluktuationen im kanonischen Ensemble durch thermodynamische Größen aus:

   a) $\langle \Delta V \Delta p \rangle$

   b) $\langle \Delta V \Delta S \rangle$

   c) $\langle \Delta S \Delta T \rangle$

   Hinweis: Transformieren Sie auf die in der Vorlesung abgeleiteten Fluktuationen in Temperatur und Volumen.

4. (3 Punkte) Anwendung der statistischen Mechanik in der Zellbiologie:

   Ein Protein befinde sich in einer Lösung von Liganden L der Konzentration (Teilchen pro Volumen) x_L. Das Protein habe einen Rezeptor R der entweder frei ist oder einen Liganden binden kann, wobei die Bindungsenergie ϵ sei (Beispiele: Transkriptionsfaktoren können an die DNS binden, Sauerstoff kann von Hämoglobin gebunden werden). Berechnen Sie im großkanonischen Ensemble die Wahrscheinlichkeit $p(x_L, \epsilon)$ daß der Rezeptor besetzt ist als Funktion von ϵ und x_L. Druck und Temperatur können dabei als konstant angenommen werden. Hinweise: Verwenden Sie die in der Vorlesung diskutierte Konzentrationsabhängigkeit des chemischen Potentials und überlegen Sie welche Terme zur großkanonischen Zustandssumme beitragen. Man kann die Form von $p(x_L, \epsilon)$, die in der Zellbiologie auch als Hillfunktion bekannt ist, auch mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes für die Reaktion $L + R \rightleftharpoons RL$ ableiten.