ÜBUNGSBLATT 4 ZU
THERMODYNAMIK UND STATISTISCHE MECHANIK

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Abgabetermin: 16.11.2015 vor den Übungen

1. (4 Punkte) Es seien folgende Relationen gegeben:

   a) $u = \frac{U}{N} = \frac{v}{s^2}$, wobei $v = V/N$ und $s = S/N$ spezifisches Volumen bzw. Entropie bezeichnen.

   b) $U = c_1 \, V \exp\left(\frac{c_2 S}{VN}\right)$, wobei c_1 und c_2 Konstanten seinen.

   Überlegen Sie ob diese Relationen irgenwelchen thermodynamischen Prinzipien widersprechen und falls ja, geben Sie an welchen.

2. (5 Punkte) Die fundamentale Relation zweier Teilsysteme A und B seien

   $$S = c(NVU)^{1/3}\,,$$

   wobei c eine positive Konstante sei. Die beiden Teilsysteme werden von einer unbeweglichen, undurchlässigen und adiabatischen Trennwand geteilt. System A bestehe aus 3 Molen und habe ein Volumen von $9 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$. System B bestehe aus 2 Molen und habe ein Volumen von $4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^3$. Die Energie des Gesamtsystems sei 80 J.

   a) Skizzieren Sie die Entropie als Funktion von $U_A/(U_A + U_B)$.

   b) Die Trennwand sei nun wärmeleitend. Bestimmen Sie die inneren Energien U_A und U_B nachdem sich thermisches Gleichgewicht eingestellt hat.

   bitte wenden

3. (4 Punkte) Die fundamentale Relation eines Systems sei für die spezifischen extensiven Zustandsgrößen durch

$$u = c_1\, s^2 - c_2\, v^2\,,$$

gegeben, wobei c_1 und c_2 positive Konstanten sind.

a) Finden Sie die zugehörigen Zustandsgleichungen, d.h. Temperatur T, Druck p, und chemisches Potential μ als Funktion von S, V, N.

b) Drücken Sie nun das chemische Potential als Funktion von Temperatur und Druck aus, $\mu = \mu(T, p)$.

4. (7 Punkte) Z sei der Vektor, der alle extensiven Variablen eines Systems zusammenfasst, also z.B. $S = S(Z)$ mit $Z = (U, V, N)$ oder $U = U(Z)$ mit $Z = (S, V, N)$. Zeigen Sie mit Hilfe der Prinzipien der Entropiemaximierung und Energieminimierung daß für jedes beliebige thermodynamische System

a) die Entropie eine konkave Funktion der extensiven Variablen ist, d.h. daß

$$\lambda S(Z_1) + (1-\lambda) S(Z_2) \leq S\left[\lambda Z_1 + (1-\lambda) Z_2\right]$$

für $0 \leq \lambda \leq 1$ ist

b) und daß die innere Energie eine konvexe Funktion der extensiven Variablen ist, d.h. daß

$$\lambda U(Z_1) + (1-\lambda) U(Z_2) \geq U\left[\lambda Z_1 + (1-\lambda) Z_2\right]$$

für $0 \leq \lambda \leq 1$ ist.

c) Zeigen Sie daß damit insbesondere die zweiten Ableitungen der Entropie eine negativ semidefinite Matrix bilden, während die zweiten Ableitungen der inneren Energie eine positiv semidefinite Matrix bilden.

d) Demonstrieren Sie damit daß für jedes thermodynamische System bei konstanter Stoffmenge und Volumen die Temperatur mit der Energie zunehmen muss und daß die adiabatische Kompressibilität nicht negativ ist, d.h. daß gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial U}\right)_{V,N} &\geq 0 \\ \kappa_S \equiv -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S &\geq 0\,. \end{aligned}$$