

**Theoretische Physik III (Thermodynamik und statistische Mechanik)**  
**WS 2015/2016**  
**Übungsklausur**

04. 01. 2016 in den Übungsgruppen (120 Minuten)

.....  
**Nachname (Blockschrift)**

.....  
**Vorname (Blockschrift)**

.....  
**Matrikel-Nr.**

**Übungsgruppe (Leiter):** .....

**Erlaubte Hilfsmittel:**

Einfacher Taschenrechner für numerische Rechnungen.

Handschriftliche Notizen im Umfang von 2 DIN-A4-Seiten

(Vorder- und Rückseite beschrieben).

**BITTE MOBILTELEFON KOMPLETT AUSSCHALTEN !!**

Die Klausurbögen sind auch dann wieder abzugeben, wenn sie nicht bearbeitet wurden.

(7 Bögen plus Deckblatt). Die Rückseiten der Bögen können auch benutzt werden.

Aufgabe	1	2	3	4	$\Sigma$
Max. Punktzahl	8	16	16	10	50
erzielte Punktzahl					

1. (8 Punkte) Der Druck eines Systems sei als Funktion  $p(T, V, N)$  von Temperatur, Volumen und Teilchenzahl gegeben. Drücken Sie die partielle Ableitung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial N} \right|_{T, V}$$

durch die Ableitung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{T, N}$$

aus.



2. (16 Punkte) Ein System bestehe aus zwei unterscheidbaren harmonischen Quantenoszillatoren mit jeweils der natürlichen Frequenz  $\omega_0$  und Quantenzuständen der Energie  $(n + \frac{1}{2}) \hbar\omega_0$ , wobei  $n$  nicht-negative ganze Zahlen sind. Die totale Energie des Systems im mikrokanonischen Ensemble sei  $U = m\hbar\omega_0$ , wobei  $m$  eine positive ganze Zahl ist.

a) Nehmen Sie an daß  $m \gg 1$  so daß  $U$  als eine kontinuierliche Variable aufgefasst werden kann. Berechnen Sie die Entropie  $S(U)$  als Funktion der Energie  $U$  und die Zustandsgleichung für die Temperatur  $T$ .

b) Berechnen Sie nun zum Vergleich die Entropie  $S = k_B \ln[\partial\Omega_H/\partial U]$  von zwei klassischen *unterscheidbaren* harmonischen Oszillatoren derselben Masse  $m$  und Frequenz  $\omega_0$ . Der Hamiltonian für einen der Oszillatoren ist also durch

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$$

gegeben und das Volumen aller klassischen Phasenraumpunkte mit Energie  $\leq U$  ist damit

$$\Omega_H(U) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{H(q_1, p_1) + H(q_2, p_2) \leq U} dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 .$$

Hinweis: Das Volumen einer  $n$ -dimensionalen Kugel mit Radius  $R$  ist

$$V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} R^n .$$







3. (16 Punkte) Betrachten Sie die Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Standardabweichung  $\sigma$ ,

$$p_G(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad -\infty < x < +\infty.$$

- a) Berechnen Sie die Entropie dieser Verteilung, d.h.

$$S[p(x)] = -k_B \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx$$

für  $p(x) = p_G(x)$ .

- b) Zeigen Sie, daß für jede andere Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p(x)$  mit gleichem zweiten Moment  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2$  gilt

$$S[p(x)] \leq S[p_G(x)],$$

d.h. die Gaussverteilung maximiert bei gegebenem zweiten Moment die Entropie. Hinweis: Um ein Extremum zu finden variieren Sie das Integral in  $S[p(x)]$  nach  $p(x)$  unter den Nebenbedingungen da die Werte von  $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx$  und  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$  fixiert sind. Um nachzuweisen, daß es sich um ein Maximum handelt, finden Sie sodann ein  $p(x)$  für das  $S[p(x)] < S[p_G(x)]$ .

-

-

-

4. (10 Punkte) Osmotischer Druck:

Eine Membran teile ein System in zwei Teile. In einem der Teile befinde sich neben dem Lösungsmittel  $L$  auch ein gelöster Stoff mit Konzentration  $x_s = N_s/(N_L + N_s) = 1 - x_L \ll 1$  ( $N_L$  und  $N_s$  sind die Anzahl von Molekülen des Lösungsmittels bzw. des gelösten Stoffes), während der andere Teil nur aus Lösungsmittel bestehe. Die Membran sei für Wärme und für das Lösungsmittel durchlässig, nicht aber für den gelösten Stoff. Berechnen Sie näherungsweise die Druckdifferenz zwischen den beiden Teilsystemen als Funktion der Konzentration  $x_s$  des gelösten Stoffes. Hinweis: Benutzen Sie die Abhängigkeit des chemischen Potentials von Druck und Konzentration sowie die Maxwell-Relation  $(\partial p/\partial \mu)_{T,V} = (\partial N/\partial V)_{T,\mu}$  und nehmen Sie an daß das spezifische Volumen des Lösungsmittels konstant sei.

-

-

-