

Explizite lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$f'(x) + h(x) f(x) = K(x)$$

Beispiel: $h(x) = \frac{a}{x} \quad K(x) = bx$

also $f' + \frac{a}{x} f = bx$

Beobachtung: wenn $f(x) = \alpha x^2$, dann sind beide Seiten proportional zu x ("Erwarten")

=> spezielle Lösung: $f_s(x) = \frac{b}{2+a} x^2$

=> allgemeine Lösung $f(x) = \frac{C}{x^a} + \frac{b}{2+a} x^2$

$C \in \mathbb{R}$ beliebig

allgemeine Technik: Variation der Konstanten

Ansatz: $f_S(x) = c(x) e^{-\int^x h(y) dy}$

$$\rightarrow c(x) = \int^x K(x) e^{\int^x h(y) dy} dx + \text{const.}$$

in unserem Beispiel $h(x) = \frac{a}{x}$ $K(x) = bx$

$$\begin{aligned} \Rightarrow c(z) &= \int^z bx e^{\int^x \frac{a}{y} dy} dx = b \int^z x \underbrace{e^{a \ln x}}_{a^x} dx \\ &= b \int^z x^{a+1} dx = \frac{b}{a+2} z^{a+2} + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_S(x) = \frac{b}{a+2} x^{a+2} \frac{1}{x^a} = \frac{b}{a+2} x^2$$

Vorlesung 9: Lineare DGL n-ter Ordnung

Motivation: z.B. Newton's Gleichung

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} = F(t, x)$$

In linearen DGL treten alle Ableitungen $f^{(i)}$ linear auf

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) + a_{n-1}(x) f^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) f'(x) + a_0(x) f(x) &= \\ &= r(x) \quad \text{mit} \quad a_n(x) = 1 \end{aligned}$$

Lösung: $f(x) = f_h(x) + f_s(x)$

mit $\sum_{j=0}^n a_j(x) f_h^{(j)}(x) = 0$

f_h = allgemeine Lösung der homogenen DGL

f_s = spezielle Lösung der inhomogenen DGL

Es gilt:
$$f_h(x) = c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x)$$

$c_j \in \mathbb{R}$ beliebig

und $\{f_1, \dots, f_n\}$ sind n linear unabhängige Lösungen der DGL (Basislösungen)

Lösungen bekannt für

i) $n=1 \rightarrow$ Vorlesung 8

ii) $a_j(x) = a_j \in \mathbb{R} \rightarrow$ linear DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ii) \sum_{j=0}^n a_j f^{(j)} = 0$$

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x} \rightarrow f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$

$$f^{(j)}(x) = \lambda^j f(x)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^n \lambda^j a_j \cancel{f(x)} = 0$$

$e^{\lambda x}$

$$\rightarrow \sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = 0 \rightarrow \text{charakteristische Gleichung für } \lambda$$

Falls $a_j, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j = \prod_{j=1}^n (\lambda - b_j)$$

Charakteristische Gl. hat n Lösungen in $\lambda \in \mathbb{C}$
 falls eine Nullstelle mehrfach auftritt, können Lösungen zusammenfallen

Es gilt:

Lösungen der char. Gleichung

λ 1-fach reell

λ j-fach reell

$\lambda = a \pm ib$ 1-fach komplex

Basisslösung der DGL

$$e^{\lambda x}$$

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{j-1} e^{\lambda x}$$

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx \\ e^{ax} \sin bx \end{cases}$$

$$e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}$$

$$e^{(a+ib)x} + e^{(a-ib)x} = e^{ax} \underbrace{(e^{ibx} + e^{-ibx})}_{2 \cos bx}$$

$$e^{(a+ib)x} - e^{(a-ib)x} = e^{ax} \underbrace{(e^{ibx} - e^{-ibx})}_{= 2i \sin bx}$$

$$\lambda = a + i b$$

$\hat{j}$ -fold complex

$$\begin{cases} e^{ax} \cos bx, \dots, x^{\hat{j}-1} e^{ax} \cos bx \\ e^{ax} \sin bx, \dots, x^{\hat{j}} e^{ax} \sin bx \end{cases}$$

Lineare DGL zweite Ordnung

$$m\ddot{x} = F(t, x)$$

$$f(x)$$

$$x(t)$$

betrachte:

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

↖ Kraft

z.B. Oszillator

$$m\ddot{x} = f(t) - kx - a(t)\dot{x}$$

↖ äußere Kraft

↖ Hook'sche Gesetze
Rückstellkraft

↘ Reibungskraft

Satz: Seien $x_1(t), x_2(t)$ zwei Lösungen der homogenen Differentialgleichung $\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$

so erfüllt die Wronski-Determinante

$$W(t) := x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t)$$

die lineare DGL 1. Ordnung

$$\dot{W}(t) = -a(t)W(t)$$

Beweis: $\dot{W} = \cancel{\dot{x}_1\dot{x}_2} + x_1\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1x_2 - \cancel{\dot{x}_1\dot{x}_2} =$

$$\stackrel{\substack{\swarrow \\ \text{DGL}}}{=} x_1(-a\dot{x}_2 - bx_2) - x_2(-a\dot{x}_1 - bx_1) =$$

$$= -a(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2) = -aW$$

Lösung: $\frac{dw}{w} = -a(t)dt \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{w(t)}{w(t_0)} = - \int_{t_0}^t a(t') dt'$

$$\Rightarrow w(t) = w(t_0) e^{- \int_{t_0}^t a(t') dt'}$$

Satz: Zwei Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ sind genau dann linear unabhängig wenn $w(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) \neq 0$

linear unabhängig: $x_1(t) \neq c \cdot x_2(t)$

Beweis: $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0 \quad (\text{linear abhängig}) \quad \lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow x_1 = - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \dot{x}_2$$

$$\Rightarrow w = - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 \dot{x}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2 \dot{x}_2 = 0$$

$$\text{Sei } w(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{x_2} \quad x_1, x_2 \neq 0$$

$$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} \quad ; \quad \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \ln x_1(t) = \ln x_2(t) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \text{const.}^1 \cdot x_2(t)$$

Homogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 12

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

$$x(t) = e^{\lambda t} \quad \rightarrow \quad (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) \cancel{e^{\lambda t}} = 0$$

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Fallunterscheidung:

$$i) \quad a_0 < \frac{a_1^2}{4} \quad \rightarrow \quad 2 \text{ reelle Lösungen } \lambda_{1,2}$$

$$\rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$ii) \quad a_0 = \frac{a_1^2}{4} \quad \rightarrow \quad 1 \text{ reelle Lösung } \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

Probe: $\dot{x}(t) = \lambda x + c_2 e^{\lambda t}$

$$\ddot{x}(t) = \lambda \dot{x} + \lambda c_2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x + 2\lambda c_2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = \lambda^2 x + 2\lambda c_2 e^{\lambda t} + a_1(\lambda x + c_2 e^{\lambda t}) + a_0 x$$

$$= x \underbrace{(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0)}_{=0} + c_2 e^{\lambda t} \underbrace{(2\lambda + a_1)}_{=0} = 0 \quad \checkmark$$

$$i) c) \quad a_0 > \frac{a_1^2}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0} = \underbrace{\sqrt{-1}}_i \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}} = i \sqrt{|a_0 - \frac{a_1^2}{4}|}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i \sqrt{|a_0 - \frac{a_1^2}{4}|} = a + ib \quad ; \quad \lambda_2 = \lambda_1^*$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$x(t) = e^{at} (\tilde{c}_1 \cos bt + \tilde{c}_2 \sin bt)$$

$$\text{da: } e^{\lambda_1 t} = e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{\lambda_1^* t} = e^{at} (\cos bt - i \sin bt)$$

$$\dot{x} = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\ddot{x} = c_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t}$$

Inhomogene DGL 2. Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = f(t)$$

$$\text{Dann: } x(t) = x_h(t) + x_s(t)$$

Auffinden von $x_s(t)$

- i) "Ersetzen"
- ii) Variation der Konstanten
- iii) Spezielle Funktionen $f(t) \rightarrow$ Lösungen
- iv) $f(t)$ ist Polynom $f(t) = \sum_{j=0}^n f_j t^j$

Ansatz: $x(t) = \sum_{j=0}^n p_j t^j$

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^n j p_j t^{j-1}$$

$$\ddot{x}(t) = \sum_{j=0}^n j(j-1) p_j t^{j-2}$$

$$\rightarrow \sum_{j=0}^n [j(j-1) p_j t^{j-2} + a_1 j p_j t^{j-1} + a_0 p_j t^j] = \sum_{j=0}^n f_j t^j$$

$\rightarrow$ Koeffizientenvergleich:

$$t^0: \quad 2p_2 + a_1 p_1 + a_0 p_0 = f_0 \quad \rightarrow \text{Lösen für } p_2$$

$$t^1: \quad 6p_3 + a_1 2p_2 + a_0 p_1 = f_1 \quad \rightarrow p_3$$