Fourierreihen

$$f(x+p) = f(x) \qquad \forall x$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) \right]$$

mit

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) dx \ ; \quad b_n = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) dx$$

Alternativ: Komplexe Fourierreihen

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{i \frac{2\pi}{p} n x}$$

mit den Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i n_1 x} e^{i n_2 x} dx = 2\pi \, \delta_{n_1 n_2} = \begin{cases} 2\pi & n_1 = n_2 \\ 0 & n_1 \neq n_2 \end{cases}$$

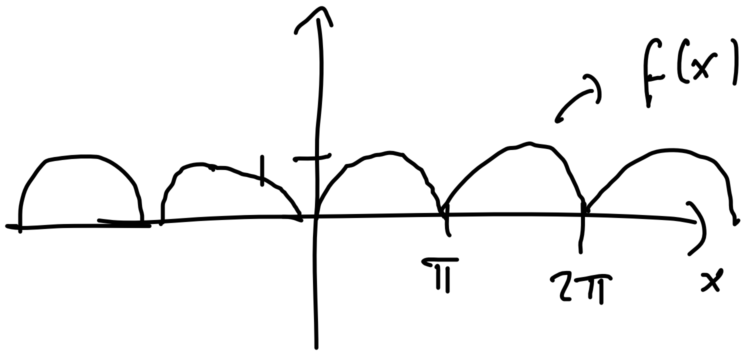
hat man dann

$$g_n = \frac{1}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) e^{-i \frac{2\pi}{p} n x} dx$$

$$g_{\pm n} = \frac{1}{2} (a_n \mp i b_n) \qquad n = 0, 1, \dots, \infty$$

da $\quad e^{-i \frac{2\pi}{p} n x} = \cos \frac{2\pi}{p} n x - i \sin \frac{2\pi}{p} n x$

Beispiel 2: $\quad f(x) = |\sin x| \qquad -\pi < x \leq \pi \qquad p = 2\pi$



$$f(-x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad b_n = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\frac{2}{\pi}\cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}$$

$n \neq 0$: $\quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$

Benutze Additionstheoreme:

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow \quad \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$$

$$a = nx \; ; \quad b = x \qquad \Rightarrow \quad \cos nx \sin x = \frac{1}{2}\left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right]$$

$$\Rightarrow \quad a_{n \neq 0} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)x \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)x \Big|_0^{\pi}\right]$$

$$\int \sin \alpha x \, dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\left(\underbrace{\cos(n+1)\pi}_{(-1)^{n+1}} - 1\right) + \frac{1}{n-1}\left(\underbrace{\cos(n-1)\pi}_{(-1)^{n-1}} - 1\right)\right]$$

$$(-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -1 & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right) & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n^2-1}(n-1-n-1) = -\frac{2}{n^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^2-1}$$

$\Rightarrow$ $|\sin x|$ periodisch mit Periode π da $\cos 2n(x + h\pi)$

$= \cos(2nx + 2h\pi$ [redacted] $) = \cos(2nx)$

Vorlesung 8: Gewöhnliche Differentialgleichungen (DGL)

Gewöhnliche DGL sind Gleichungen in denen $f(x)$ und beliebige Ableitungen $f^{(n)}(x)$ sowie beliebige Funktionen $g(f(x), f^{(n)}(x), x)$ auftreten

Ziel ist es $f(x)$ als Lösung der DGL zu bestimmen

Verschiedene Typen von DGL:

1.) explizite DGL 1. Ordnung $\boxed{f'(x) = g(x, f(x))}$

g ist unabhängig von $f'(x)$

nur $f'(x)$ tritt auf

$h(f'(x), f(x), x) = 0$

implizite DGL

B1: $g(x, f(x)) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g(x)$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{x_0}^{x} g(y)\,dy$$ d.h. $f(x)$ ist Stammfunktion von $g(x)$

B2: $g(x, f(x)) = a f(x)$; $a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = a f(x)$

Lösung: $f(x) = e^{ax}$ da $f'(x) = a e^{ax} = a f(x)$

Lösung ist nicht eindeutig: $f(x) = b e^{ax}$ $b \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ 1 parametrige Schar von Lösungen

b wird durch Anfang- oder Randbedingungen festgelegt

$$f(x = x_0) = f_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow b = f_0 e^{a x_0}$$

Separierbare DGL : $g(x, f(x)) = h(x)\, K(f(x))$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = h(x) \cdot K(f(x))$$

Lösung durch "Trennung der Variablen"

$$\frac{f'(x)}{K(f(x))} = h(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y^0}^{y} \frac{f'(x)}{K(f(x))}\, dx = \int_{y_0}^{y} h(x)\, dx$$

Variablensubstitution : $z = f(x) \Rightarrow dz = f'(x)\, dx$

$$\Rightarrow \quad \int_{z^0}^{f(y)} \frac{dz}{K(z)} = \int_{y_0}^{y} h(x)\, dx \quad \text{mit } z^0 = f(y^0)$$

B3 : $h(x) = \alpha x \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$K(f(x)) = 1 + f^2(x) \quad \to \quad K(z) = 1 + z^2$$

$$\Rightarrow \int^{f(y)} \frac{dz}{1+z^2} = \alpha \int^{y} x \, dx$$

$$\Leftrightarrow \arctan f(y) + \text{const.} = \frac{\alpha y^2}{2} + \text{const.}'$$

$$\Rightarrow \arctan f(y) + c = \frac{\alpha y^2}{2} \quad \Rightarrow \quad f(y) = \tan\left(\frac{\alpha y^2}{2} - c\right)$$

Probe : $f'(y) = \alpha y \left(1 + f^2(y)\right)$

Spezialfall: Lineare DGL 1. Ordnung

$\Downarrow$

f, f' treten linear auf

$$g(x) = K(x) - h(x)\, f(x)$$

DGL: $$\boxed{f'(x) + h(x)\, f(x) = K(x)}$$

$K(x) \equiv 0 \;\rightarrow$ homogene linearen DGL 1. Ordnung

$$\rightarrow \quad f'(x) + h(x)\, f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad h(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\Rightarrow \int_{y^0}^{y} h(x)\, dx = -\int_{y_0}^{y} \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = -\ln f(y)\Big|_{y_0}^{y} =$$

$$= -\ln f(y) + \underbrace{\ln f(y_0)}_{\rightarrow \text{ const.}}$$

$$\Rightarrow \quad \ln f(y) = c - \int_{y_0}^{y} h(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(y) = e^c \, e^{-\int_{y_0}^{y} h(x)\,dx}} \qquad (*)$$

Probe: $$f'(y) = e^c \, e^{-\int_{y_0}^{y} h(x)\,dx} \left[-\frac{d}{dy} \int_{y_0}^{y} h(x)\,dx\right]$$

$$= -h(y) \underbrace{e^c e^{-\int_{y_0}^{y} h(x)\,dx}}_{f(y)} = -h(y)\, f(y)$$

$$\Rightarrow \quad f'(y) + h(y)\, f(y) = 0$$

Behauptung: $(*)$ ist die allgemeinste Lösung von $f'(x) + h(x) f(x) = 0$

Beweis: Annahme: es gibt ein $g(x) \neq f(x)$

mit $g' = -hg$

Definiere $\quad c(x) := \dfrac{g(x)}{f(x)} = g(x)\, e^{\int^x h(z)\,dz}$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = g'(x)\, e^{\int^x h(z)\,dz} + g(x)\, h(x)\, e^{\int^x h(z)\,dz}$$

$$= e^{\int^x h(z)\,dz} \left[g'(x) + g(x)\, h(x) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c(x) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad g(x) \propto f(x)$$

$$g(x) = \text{const.} \cdot f(x)$$

Lösung der inhomogenen DGL:

$$f'(x) + h(x)\, f(x) = K(x)$$

Es gilt: $f(x) = f_h(x) + f_s(x)$

wobei $f_h'(x) + h(x)\, f_h(x) = 0$ f_h = Lösung der homogenen Gl

$f_s'(x) + h(x)\, f_s(x) = K(x)$ f_s = Lösung der inhomogenen Gl.

Beweis: $f' = f_h' + f_s' = -h f_h - h f_s + K =$

$= K - h(f_h + f_s) = K - hf$

$\Rightarrow f' + hf = K$

Auffinden von f_s: eine spezielle Lösung genügt

1.) Erraten : manchmal möglich

B: $h(x) = \frac{a}{x}$; $k(x) = bx$ $a, b \in \mathbb{R}$

DGL: $f' + \frac{a}{x} f = bx$

$$f_h(x) = c e^{-\int^x \frac{a}{y} dy} = c e^{-a \ln x} = \frac{c}{x^a}$$

$$e^{-a \ln x} = \left(e^{\ln x}\right)^{(-a)} = x^{(-a)} = \frac{1}{x^a}$$

für $f_s(x)$ Ansatz: $f_s(x) = \alpha x^2$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_s' = 2\alpha x$

$\rightarrow 2\alpha x + \frac{a}{x} \alpha x^2 = bx \rightarrow (2+a)\alpha = b$

$\Rightarrow \alpha = \frac{b}{2+a} \rightarrow f_s(x) = \frac{b}{2+a} x^2$ ist spezielle Lösung

$$\Rightarrow \underline{f(x) = \frac{c}{x^a} + \frac{b}{a+2}\, x^2}$$ ist die allgemeinste Lösung

der inhomogenen DGL $\quad f' + \frac{a}{x} f = bx$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig

2. Variation der Konstanten

Lösungsansatz $\quad f_s(x) = c(x)\, e^{-\int^x h(y)dy}$

$$f_s'(x) = c' e^{-\int^x h(y)dy} - h(x) f_s(x)$$

$$\rightarrow \quad f_s' + h(x) f_s = K(x) \quad \rightarrow \quad c' e^{-\int^x h(y)dy} \cancel{- h f_s} \cancel{+ h f_s} = K(x)$$

$$\rightarrow \quad c'(x) = K(x)\, e^{\int^x h(y)dy}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{c(z) = \int^z K(x)\, e^{\int^x h(y)dy} + \text{const.}}$$

Tutorium Di 9:45 - 11:45 in Smr. 6