Tutorium Di : 9:45 – 11:45 Herrn Häinsel

[redacted]

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$ echt rational gebrochene Funktion

Grad [P(x)] < Grad [Q(x)]

$$Q(x) = \prod (x-a_i)^n \cdots \left[(x-b_i)^2 + c_i^2\right]^m \cdots$$

Nullstelle n-ten Grades $\qquad |c_i| > 0$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(x-a_i)^k} + \dots + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k x + C_k}{\left[(x-b_i)^2 + c_i^2\right]^k}$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \rightarrow A_1 \ln(x-a_i) + \dots + \frac{A_k}{(x-a_i)^{k-1}} \frac{1}{1-k} + \dots \text{arctan} \dots$$

Komplexe Zahlen

$a = \mathrm{Re}\, z$: Realteil

$b = \mathrm{Im}\, z$: Imaginärteil

$$z = (a, b) = a + ib \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

geordneter Paar reeller Zahlen

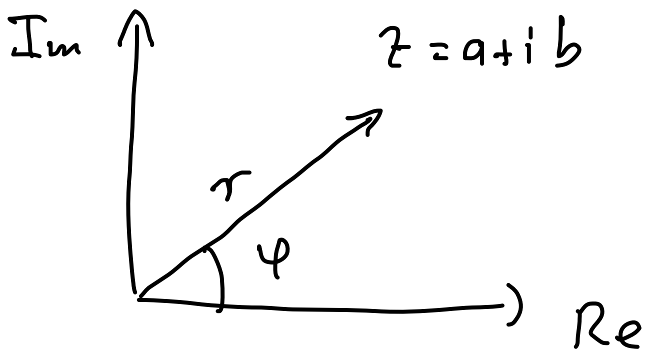
$$i := \sqrt{-1} \qquad i^2 = -1$$

Addition: $(a, b) + (c, d) = (a+c,\ b+d) =$

$$= (a+c) + i(b+d)$$

Multiplikation: $(a+ib)(c+id) = ac - bd + i(ad + bc)$

Polardarstellung



$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi}$$

$$z = a + ib = r e^{i\varphi}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Eulersche Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Beweis: 1.) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} (i)^k \frac{\varphi^k}{k!}$

$$= \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\varphi^{2l}}{(2l)!}}_{\cos\varphi} + i \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\varphi^{2l+1}}{(2l+1)!}}_{\sin\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow |e^{i\varphi}| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, e^{i\varphi})^2 + (\mathrm{Im}\, e^{i\varphi})^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

konjugiert komplexe Zahl

$z = a + ib \Rightarrow z^* = \bar{z} = a - ib$

$i^* = -i$

$$zz^* = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = |z|^2$$

$$z = re^{i\varphi} \Rightarrow z^* = re^{-i\varphi}$$

$$zz^* = r^2 e^{i\varphi} e^{-i\varphi} = r^2 e^{i\varphi - i\varphi} = r^2$$

$$\Rightarrow |z|^2 = zz^* = r^2$$

$$(z_1+z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$$

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+z^*) = \frac{1}{2}(a+\cancel{ib}+a\cancel{-ib}) = a$$

$$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-z^*) = \frac{1}{2i}(\cancel{a}+ib-\cancel{a}+ib) = b$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) \\ \sin\varphi &= \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) \end{aligned}}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \cosh i\varphi$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi = \frac{1}{i}\sinh i\varphi$$

Komplexe Wurzeln

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\varphi/n}$$

$$\left(e^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{i\varphi/n}$$

$$|z^{1/n}| = |z|^{1/n}$$

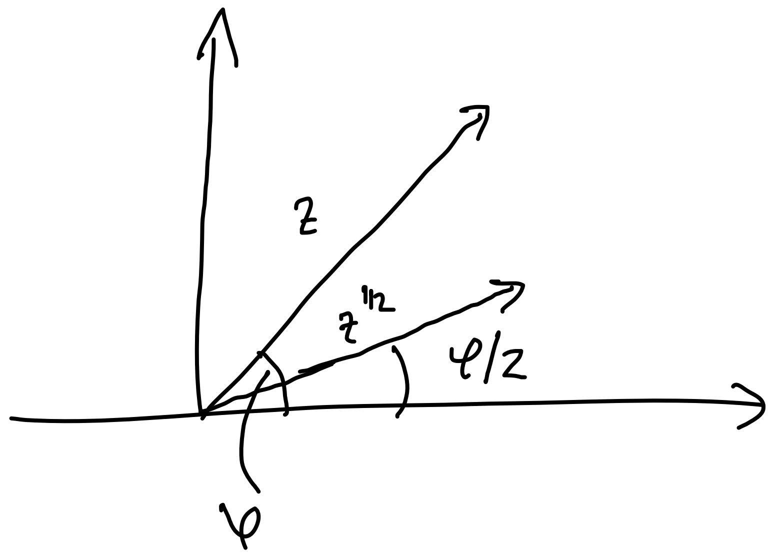
$$\varphi \to \frac{\varphi}{n}$$

Beispiel: $z^{1/2} = \sqrt{z}$

Periodisch unter

$\varphi \to \varphi + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$

$$e^{i 2\pi k} = 1$$



Multiplikation, Division, Potenzen von komplexen Zahlen

Man dividiert komplexe Zahlen durch Erweitern des Bruches mit dem konjugiert komplexen des Nenners:

$$z = \frac{u}{v} = \frac{u v^*}{v v^*} = \frac{u v^*}{|v|^2}$$

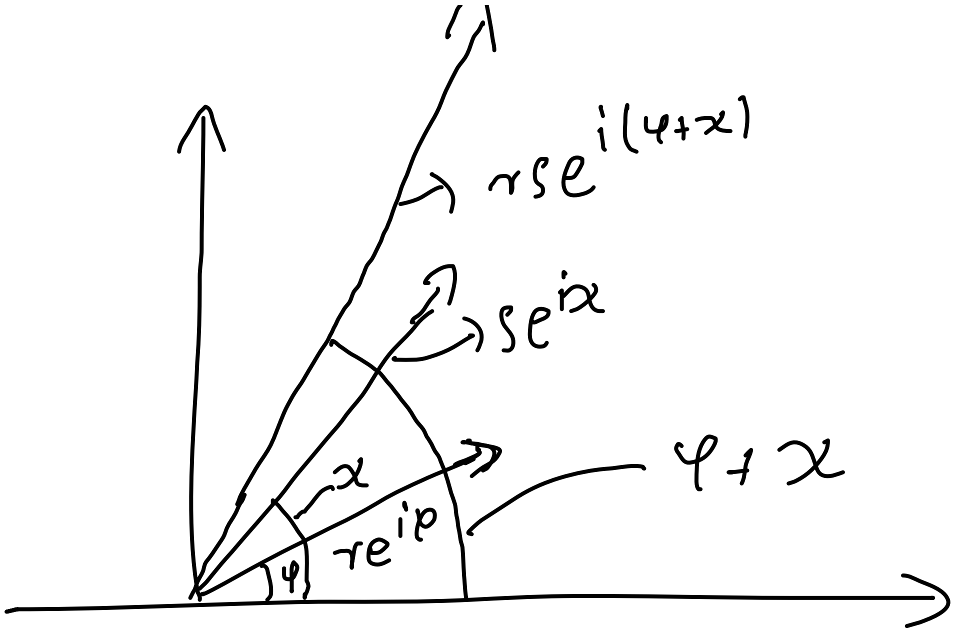
Polardarstellung: $z = \dfrac{r e^{i\varphi}}{s e^{i\chi}} = \dfrac{r}{s}\, e^{i(\varphi - \chi)}$

→ Beträge werden dividiert, Winkel subtrahiert

Multiplikation:

$$z = u v = r e^{i\varphi} s e^{i\chi} = r s\, e^{i(\varphi + \chi)}$$

→ Beträge werden multipliziert, Winkel addieren sich



Potenzieren:

$$z^k = (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi}$$

$\rightarrow$ Betrag wird mit k potenziert, Winkel wird mit k multipliziert

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $f(z)$ mit komplexen Koeffizienten a_i n-ten Grades

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

$a_i, z \in \mathbb{C}$

läßt sich als Produkt von n Linearfaktoren schreiben:

$$f(z) = a_n (z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_n)$$

b_i sind die Nullstellen von $f(z)$ $\quad f(z) = 0 \iff z = b_i$

$i = 1, \dots, n$

Falls $f(z)$ reell wenn $z = x$ reell, d.h.

$$f^*(x) = f(x) \qquad \text{für } x = x^*$$

z ist reell $\Leftrightarrow$ $z = z^*$ $\qquad a + ib = a - ib \Leftrightarrow b = 0$

$$f^*(x) = a_n^* (x - b_1^*) \cdots (x - b_n^*) = f(x) = a_n (x - b_1) \cdots (x - b_n)$$

$\Leftrightarrow$ $a_n = a_n^*$

So ist entweder $b_i = b_i^*$ oder falls b_i nicht reell ist, treten Nullstellen paarweise als b_i und b_i^* auf

$$(x - b_i)(x - b_i^*) = \big(x - \mathrm{Re}(b_i) - i\,\mathrm{Im}(b_i)\big)\big(x - \mathrm{Re}(b_i) + i\,\mathrm{Im}(b_i)\big) =$$

"=" $(a-b)(a+b)$ $\qquad = \big(x - \mathrm{Re}(b_i)\big)^2 + \left[\mathrm{Im}(b_i)\right]^2$

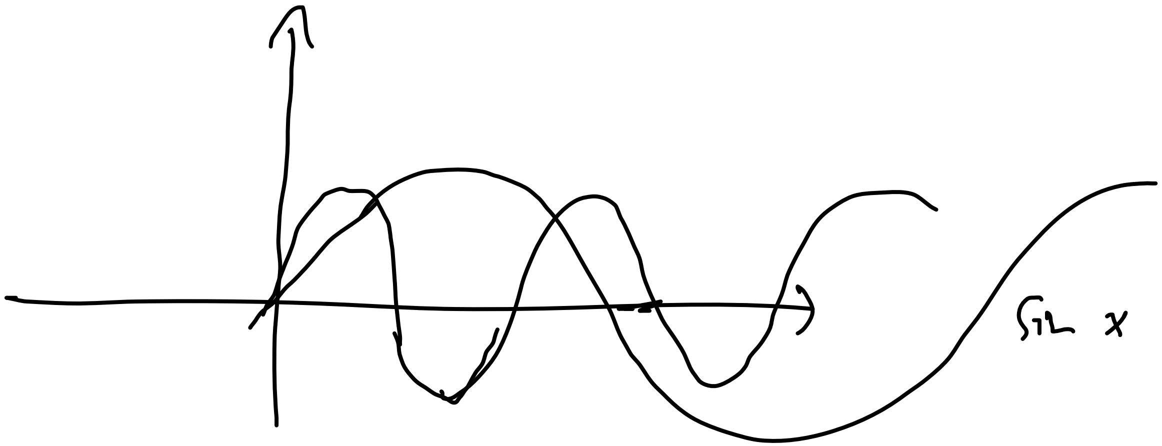
Der Faktor $(x-b_i)(x-b_i^*)$ hat die Nullstellen

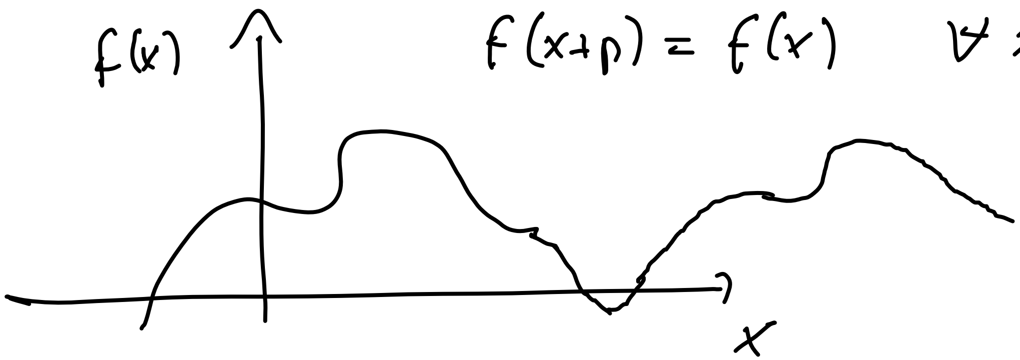
$$x = b_i \,, \quad x = b_i^*$$

$\Rightarrow$ diese quadratischen Faktoren haben keine Nullstellen auf der reellen Zahlengerade und sind daher im Reellen nicht zerlegbar

Fourierreihen

$\cos nx \quad , \quad \sin nx$





$f(x+p) = f(x) \quad \forall x \qquad p =$ fixe reelle Zahl

Jede periodische Funktion $f(x+p) = f(x)$ mit Periode p läßt sich in eine Fourierreihe der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) \right]$$

mit

$$a_n = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) dx$$

$$b_n = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{p} n x\right) dx$$

entwickeln

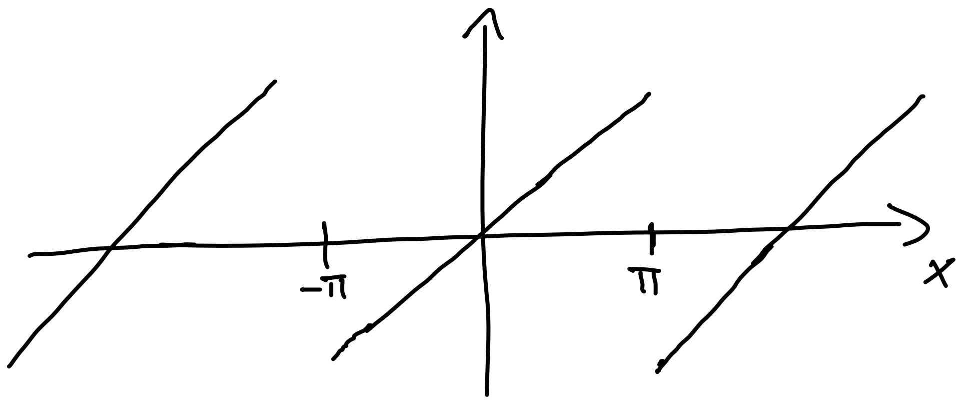
Bemerkung:

$$\text{Falls } f(x) \begin{cases} \text{gerade} & f(x) = f(-x) \\ \text{ungerade} & f(x) = -f(-x) \end{cases} \text{ dann gilt } \begin{cases} b_n = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{-p/2}^{p/2} f(x)\,dx$$

Beispiel 1: $f(x) = x \qquad -\pi < x \leq \pi \qquad f(x + 2\pi n) = f(x)$

$p = 2\pi$



$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\underbrace{\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\,dx\Big]$$

partielle Integration:

$$\cos nx = \frac{1}{n}\frac{d}{dx}\sin nx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{1}{n\pi}\,x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx$$

partielle Integration

$$\sin nx = -\frac{1}{n}\frac{d}{dx}\cos nx$$

$=$

$$= -\frac{1}{\pi n}\left(\pi \cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)\right) + \underbrace{\frac{1}{\pi n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0}$$

$$= -\frac{2\pi \cos n\pi}{\pi n} = -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} = b_n$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \qquad\qquad \sum \frac{1}{n}$$

<u>Beispiel 2:</u>

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{für} \quad -\pi < x \leq \pi \qquad p = 2\pi$$

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n)^2 - 1}$$