

Integralrechnung

Rechen Techniken

- i) Linearität
- ii) partielle Integration
- iii) Variablen Substitution

$$\int g' f dx = g f - \int g f' dx$$

Kettenregel: $[g(f(x))] = g'(f(x)) f'(x)$

$$\Rightarrow \int g'(f(x)) f'(x) dx = \int [g(f(x))] dx =$$

$$= g(f(x))$$

B1: $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (e^{-x^2})' dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

$$\text{B 2: } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int [\ln f(x)]' dx = \ln f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{z.B. } \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{\cos' x}{\cos x} dx = \\ &= - \ln \cos x \end{aligned}$$

$$g' = h \quad f(x) = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = f'(x) \quad \Rightarrow \quad dz = f'(x) dx$$

$$\Rightarrow \int g'(f(x)) f'(x) dx = \int h(z) dz = g(z) = g(f(x))$$

$$\text{B 1: } z = x^2 \quad ; \quad h(z) = e^{-z} \quad \Rightarrow \quad dz = 2x dx$$

$$\Rightarrow \int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-z} dz = -\frac{1}{2} e^{-z} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

$$B3: \quad I = \int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}} dx$$

Substitution $z = \sqrt{1+x} \Rightarrow dz = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$

$$\Rightarrow x = z^2 - 1 \Rightarrow I = 2 \int \frac{1}{z^2+1} dz =$$

$$= 2 \arctan z = 2 \arctan \sqrt{1+x}$$

$$B4: \quad \int \sin x \cos^n x dx = - \int z^n dz = - \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

$\nwarrow$

$$z = \cos x$$

$$\Rightarrow dz = -\sin x dx$$

$$= - \frac{1}{n+1} (\cos x)^{n+1}$$

Uneigentliche Integrale

Sind Integrale bei denen entweder

i) eine oder beide Integrationsgrenzen $\pm \infty$ sind

ii) Integrand ist singular im Integrationsbereich

z.B.
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx$$

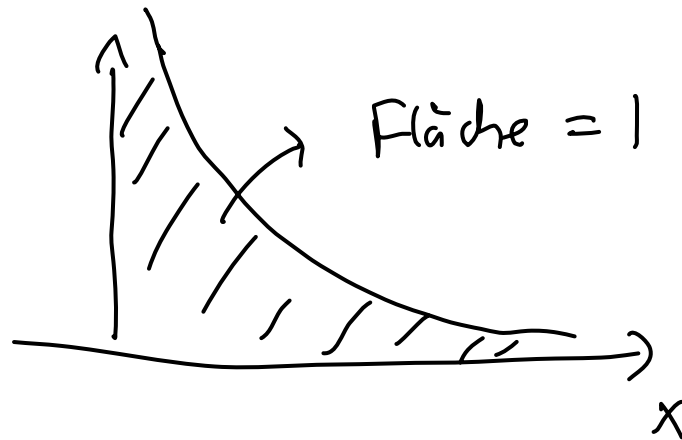
Ist $f(x)$ auf einem Intervall $a \leq x \leq c < b$ (b kann auch ∞ sein) integrierbar, so definiert man

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$$

Falls dieser Grenzwert existiert heißt das uneigentliche Integral konvergent, sonst divergent

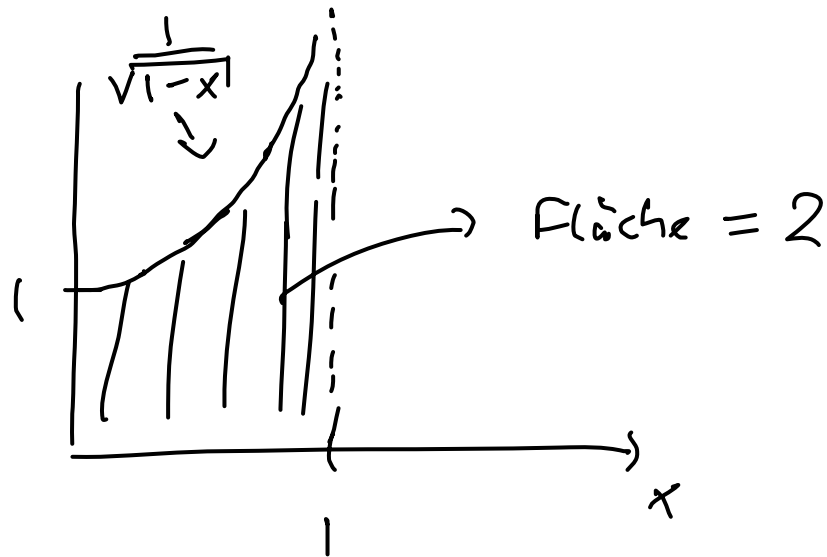
$$B1: \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c e^{-x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^c$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} (-e^{-c} + 1) = 1$$

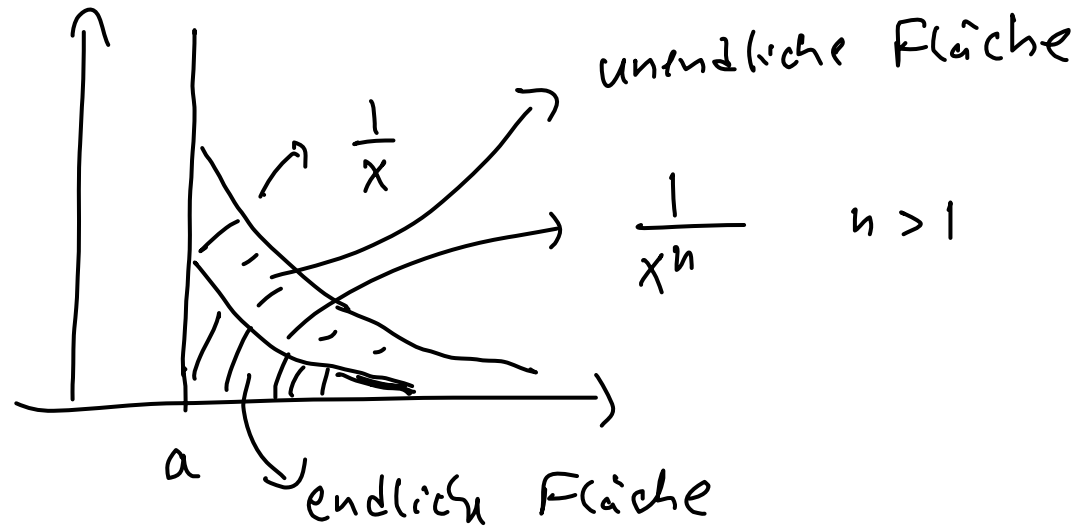


$$B2: \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} \int_0^c \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{c \rightarrow 1^-} (-2\sqrt{1-x}) \Big|_0^c$$

$$= \lim_{c \rightarrow 1^-} -2(\sqrt{1-c} - 1) = 2$$

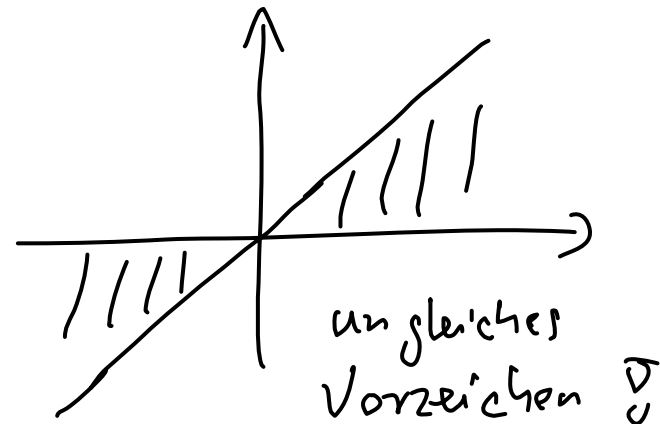


$$\begin{aligned}
 B2: \int_{a>0}^{\infty} \frac{1}{x^n} dx &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c \frac{1}{x^n} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{x^{-n+1}}{1-n} \Big|_a^c & n > 1 \\ \ln x \Big|_a^c & n = 1 \end{cases} \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{1-n} (c^{-n+1} - a^{-n+1}) & n > 1 \\ \ln \frac{c}{a} & n = 1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{a^{-n+1}}{1-n} & n > 1 \\ \infty & n = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$



$$B4: \int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^{+c} x dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \left. \frac{1}{2} x^2 \right|_{-c}^c =$$

$$= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (c^2 - c^2) = 0$$



B5: Γ -Funktion

$$\Gamma(n) := \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^n (-e^{-x})' dx = \\ &= -x^n e^{-x} \Big|_0^{\infty} + n \underbrace{\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx}_{\Gamma(n)} = n \Gamma(n) \end{aligned}$$

$e^{-x} = -(e^{-x})'$

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n)$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

$\Rightarrow \Gamma$ ist Integraldarstellung
von $n!$

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

(Verallgemeinerung)

Berechnung von Integralen von rationalen Funktionen
mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

Eine rationale Funktion ist von der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$
mit P und Q beliebige Polynome

Falls der Grad von $Q(x) >$ Grad von $P(x)$

spricht man von einer echt gebrochenen rationalen Funktion
und läßt sich als Summe von Partialbrüchen schreiben

$$\text{B: } \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} = \frac{5}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x}$$

$$\int \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)} dx = \frac{5}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{5}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1|$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)(x+1)} [5(x+1) - (x-1)] = \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)(x+1)} (4x+6)$$

$$= \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$$

Allgemein: $\frac{P(x)}{Q(x)} = ?$ $Q(x)$ habe bei $x=a$ eine n -fache Nullstelle:

$$Q(x) = (x-a)^n \tilde{Q}(x)$$

mit $\tilde{Q}(a) \neq 0$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{p^+(x)}{q^+(x)} \quad \text{mit} \quad p^+(a) q^+(a) \neq 0$$

Beispiel: $\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$

↙
Ansatz

Multipliziere mit $(x-1)(x-2)^2$

$$\Rightarrow x = A(x-2)^2 + B(x-1)(x-2) + C(x-1) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Subtrahiere } x \\ \text{auf beiden Seiten} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 0 = x^2(A+B) + x(-4A-3B+C-1) + 4A+2B-C$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ 4A+3B-C+1=0 \\ 4A+2B-C=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Gleichungen für } 3 \text{ Unbekannte} \\ \text{Koeffizienten } A, B, C \\ \Rightarrow A=1, B=-1, C=2 \end{array}$$

Wir haben gezeigt:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} \right) dx$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{2}{x-2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Hat $Q(x)$ Faktoren ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$

$$Q(x) = D^n(x) \cdot H(x)$$

$$D(x) = (x-a)^2 + b^2$$

$$b \neq 0$$

$$D(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

so gilt:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k x + B_k}{D^k(x)} + \frac{P^+(x)}{Q^+(x)}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x-1}{(x^2+1)(x+1)^2} \underset{\substack{\text{Ansatz} \\ A, B, C, D \text{ ?}}}{=} \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

Multipliziere beide Seiten mit $(x^2+1)(x+1)^2$

$$\Rightarrow 3x-1 = (Ax+B)(x+1)^2 + C(x^2+1)(x+1) + D(x^2+1)$$

$$\Rightarrow x^3(A+C) + x^2(2A+B+C+D) + x(A+2B+C-3) + B+C+D+1 = 0$$

$$A+C=0$$

$$2A+B+C+D=0$$

$$A+2B+C-3=0$$

$$B+C+D+1=0$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = \frac{3}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = -2$$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{(x^2+1)(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

1. Probeklausur 26. 11.
