Extremwerte von Funktionen

$f(x)$ hat stationären Punkt bei $x = x_0$
falls $f'(x_0) = 0$

lokales $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ falls $f'(x_0) = 0$ und $\begin{cases} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$

Ist die n'te Ableitung die erste Ableitung, die bei x_0 verschwindet, also

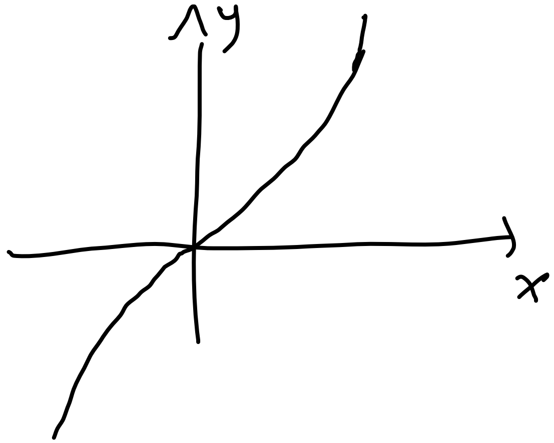
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

dann gilt:

n gerade $\Rightarrow$ $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0 & \rightarrow \text{lokales Maximum} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 & \rightarrow \text{" Minimum} \end{cases}$

n ungerade $\Rightarrow$ Wendepunkt bei x_0

Beispiel: $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(0) = f''(0) = 0\,;\; f'''(0) = 6$



$\rightarrow$ Wendepunkt bei $x_0 = 0$

Wenn gilt $f(x_0) \begin{cases} \geq f(x) \\ \leq f(x) \end{cases} \forall x \in D$

dann liegt bei x_0 ein absolutes oder globales

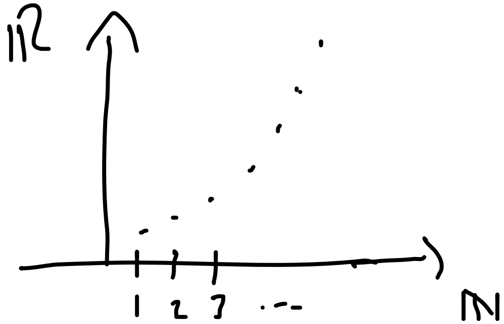
$\begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{cases}$ vor

Vorlesung 4: Reihen

Folgen: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ \Psi & & \\ n & \to & a_n \end{array}$$

Beispiel: $a_n = \sqrt{n}$: $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, ...



$a_n = 2 + \frac{1}{n}$: $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{5}{2}$, $a_3 = \frac{7}{3}$, ...

$a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge a_n wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so daß $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Beispiel: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$

Beispiel: $\displaystyle a_n = \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R}$

Grenzwert:

$n > N$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{x^N}{N!}\right| \underbrace{\frac{x}{N+1}\,\frac{x}{N+2}\cdots\frac{x}{n}}_{n-N \text{ Faktoren}} \leq \left|\frac{x^N}{N!}\right| \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$$

wähle N so daß $|x| < \frac{N}{2}$

$\Rightarrow \left|\frac{x}{N+1}\right|, \ldots, \left|\frac{x}{n}\right| < \frac{1}{2}$

$$= \frac{2^N |x|^N}{N!} \frac{1}{2^n} \to 0$$

für $n \to \infty$

Partialsumme eine Folge → Reihe

$$n \to S_n := a_0 + a_1 \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Eine (unendliche) Reihe

$$\lim_{n\to\infty} S_n =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} a & \text{Reihe konvergiert} \\ \infty & \text{Reihe divergiert} \end{cases}$$

Beispiel: geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad |q| < 1$$

Bestimme Grenzwert der Partialsummen $S_{n-1} := \sum_{k=0}^{n-1} q^k =$

$= 1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1}$

wende die geometrische Summenformel an:

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=1}^{n} a^{n-k} b^{k-1} \qquad \forall a,b \in \mathbb{R} \,;\, n \in \mathbb{N}$$

Anwendung auf $a = 1$, $b = q$

$$\Rightarrow \quad 1 - q^n = (1-q) \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = (1-q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{S_{n-1} := \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

$$1 - q^n = (1-q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } |q| < 1$$

Satz von Taylor

beliebig oft

Jede differenzierbare Funktion $f(x)$ auf einem offenen Intervall $I =]a, b[$; $x \in I \Leftrightarrow a < x < b$ läßt sich nach Potenzen von $(x - x_0)$; $x_0 \in I$ wie folgt entwickeln:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$+ f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

mit $$R_n(x) = f^{(n+1)}(\theta)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

wobei $\theta = x_0 + \alpha(x - x_0) \qquad 0 < \alpha < 1$

Beweis z.B. Fischer/Kaul

Falls $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ dann kann man $f(x)$ in eine konvergente Taylorreihe entwickeln:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Beispiele:

i) Taylorentwicklung von $\cos x$ um $x_0 = 0$

$f(x) = \cos x$; $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$; $f^{(3)}(x) = \sin x$;
$f^{(4)}(x) = \cos x$, ..

$f(0) = 1$; $f'(0) = 0$; $f''(0) = -1$; $f^{(3)}(0) = 0$; $f^{(4)}(0) = 1$, ..

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n$$

mit $R_n = (-1)^{n+1} \cos \alpha x \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$ mit $0 < \alpha < 1$

$$\Rightarrow |R_n| < \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} R_n = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) $f(x) = \ln(1+x)$: Taylorentwicklung um $x_0 = 0$

$$f(x) = h(g(x)) \qquad g(x) = 1+x \; ; \quad h(x) = \ln x$$

$$f'(x) = h'(g(x))\, g'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1}{1+x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1+x)^n}\right) = -\frac{n}{(1+x)^{n+1}}} \qquad \frac{d}{dx}\frac{1}{x^n} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad n \geq 1$$

$$n=1 : \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \; ; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\Rightarrow \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) = -n(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} =$$

$$= (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}$$

Taylorentwicklung von $f(x) = \ln(1+x)$ um $x_0 = 0$

$$f(0) = 0 \quad ; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!$$

$$\Rightarrow \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{k+1} (k-1)! \, x^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + R_n$$

$$R_n = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+\alpha x)^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \frac{1}{(1+\alpha x)^{n+1}}$$

$$0<\alpha<1$$

$$\Rightarrow |R_n| \le \frac{1}{n+1} \quad \text{für} \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1+\alpha x \ge \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

ohne Beweis: $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$

konvergiert für $|x| < 1$

Anwendung: Berechnung von Grenzwerten

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots \cancel{-1}}{x^n} =$$

$n \in \mathbb{N}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots}{x^n} = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ -\frac{1}{2} & n = 2 \\ \infty & n > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots}{x^n} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ \infty & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe der Regel von L'Hospital

Sind $f(x)$ und $g(x)$ differenzierbar in $]a,b[$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad x_0 \in]a,b[$$

So gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

gilt auch für links- oder rechtsseitige Grenzwerte

Beispiele:

"$\frac{0}{0}$": $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

"$\frac{\infty}{\infty}$": $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$e^{\ln x} = x$

$e^{-|x|}$

Gegenbeispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x} = 0 \qquad \text{L'Hospital:} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^x} = 1$$