

Vorlesung 3: Differentialrechnung

3.1

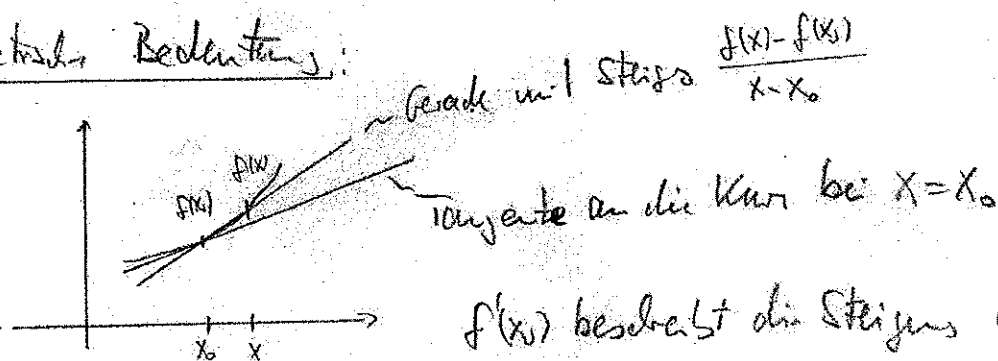
Eine Fkt heißt differenzierbar an der Stelle x_0 wenn

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert}$$

$f'(x_0)$ heißt Ableitung von f an der Stelle x_0 .

alternativ Schreibweise: $f'(x_0) \equiv \frac{d}{dx} f(x_0) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \Big|_{x=x_0} \equiv \frac{df}{dx}(x_0)$

Geometrische Bedeutung:



$f'(x_0)$ beschreibt die Steigung der Tangente t bei $x = x_0$.

d.h. $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + R(x, x_0)$

mit $\lim_{x \rightarrow x_0} a = f'(x_0)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = 0$

Beweis: $R(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x, x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{f'(x_0)} - a \right) = 0 \quad \checkmark$$

$$a = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{R}{x - x_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a = f'(x_0) \quad \checkmark$$

Beispiel

$$f(x) = x^n, \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{(x - x_0)}$$

Benutze geometrische Summenformel:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{i=1}^n a^{n-i} b^{i-1}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \sum_{i=1}^n x_0^{n-i} x_0^{i-1} = \sum_{i=1}^n x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}$$

gilt $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}}}$

$$f(x) = e^x, \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0}$$

$$\stackrel{y=x-x_0}{=} e^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e^{x_0}$$

$$= 1 \quad \text{da } e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots$$

gilt $\forall x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dx} e^x = e^x}}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} e^{-x} \stackrel{y=-x}{=} = \frac{d}{dy} e^y = -e^y = -e^{-x} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{dx} e^{-x} = -e^{-x}}}$$

$$f(x) = \sin x, \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} \stackrel{y=x-x_0}{=} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y+x_0) - \sin(x_0)}{y}$$

Benutze Additionstheorem $\sin(y+x_0) = \sin y \cos x_0 + \cos y \sin x_0$

$$\Rightarrow \sin'(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{\rightarrow 1} \cos x_0 + \underbrace{\left(\frac{\cos y - 1}{y} \right)}_{\Rightarrow 0 \text{ (L'Hôpital's rule)}} \sin x_0 \right) = \cos x_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d \sin x}{dx} = \cos x}}$$

$\cos y$ ist gerade $\Rightarrow \cos y = 1 + ay^2 + \dots$
 $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} ay = 0$

analog: $\underline{\underline{\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x}}$

Die Ableitung erfüllt folgende Regeln: (ohne Beweis)

i) Summenregel: $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$

Beispiel: $\frac{d \sinh x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dx} e^x - \frac{d}{dx} e^{-x} \right)$
 $= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$

analog $\frac{d \cosh x}{dx} = + \sinh x$

ii) Produktregel: $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{dg}{dx}$

Beispiel: $\frac{d}{dx}(x \sin x) = \underbrace{\frac{dx}{dx}}_1 \sin x + x \underbrace{\frac{d \sin x}{dx}}_{\cos x} = \sin x + x \cos x$

$\frac{d}{dx}(e^x e^{-x}) = \frac{d}{dx} 1 = 0 = \frac{d e^x}{dx} e^{-x} + e^x \frac{d e^{-x}}{dx} = 1 + e^x \frac{d e^{-x}}{dx}$
 $\Rightarrow \frac{d e^{-x}}{dx} = -e^{-x} \checkmark$

iii) Quotientenregel : $\frac{d}{dx} \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{df}{dx} g - f \frac{dg}{dx}}{g^2}$

Beispiel: $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = \frac{\left(\frac{d}{dx} 1 \right) x - 1 \frac{dx}{dx}}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = \frac{-1 \frac{dx^n}{dx}}{x^{2n}} = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{d \sin x}{dx} \cos x - \sin x \frac{d \cos x}{dx}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

iv) Kettenregel : $\frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{dg}{dx}(f(x)) \cdot \frac{df}{dx}$

Beispiel: $g = x^2$, $f = x^3 - 1 \Rightarrow g(f(x)) = (x^3 - 1)^2$

$$- \frac{d}{dx} (x^3 - 1)^2 = 2(x^3 - 1) \cdot 3x^2 = 6x^2(x^3 - 1)$$

- $g(x) = e^{\ln x}$, $f(x) = \ln x \Rightarrow g(f(x)) = e^{\ln x} = x$

$$\frac{d}{dx} e^{\ln x} = \frac{dx}{dx} = 1 = \frac{e^{\ln x}}{x} \cdot \frac{d \ln x}{dx}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}}}$$

v) Allgemein: Ableitung von Umkehrfunktionen

Sei $y = f(x)$ umkehrbar und differenzierbar
und sei $f'(x) \neq 0$ dann ist die Umkehrfunktion
 $x = g(y)$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad " \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Beweis: $g(f(x)) = x$

$$\Rightarrow g'(y) \cdot f'(x) = 1 \quad \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} (e^{\ln a})^x \underset{\substack{\uparrow \\ i 1/3}}{=} \frac{d}{dx} e^{x \ln a} = e^{x \ln a} \cdot \ln a$$

$$= a^x \ln a$$

Höhere Ableitungen:

2. Ableitung: $f''(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = (f')'$

3. Ableitung: $f'''(x) = (f'')'$

n-te Ableitung: $\frac{d^n f}{dx^n} \equiv f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

Beispiel: $\frac{d^2 e^x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{de^x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{e^x}{e^x} = \frac{d}{dx} e^x = e^x \Rightarrow \frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x$

$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{d \cos x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{-\sin x}{-\sin x} = -\frac{d \sin x}{dx} = -\cos x$

Extremwert von Funktion

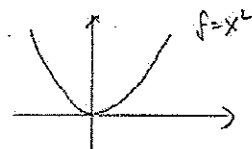
Eine Fkt $f(x)$ hat kritische (stationäre) Punkte an der Stelle x_0 wenn gilt $f'(x_0) = 0$.

Eine Fkt $f(x)$ hat ein lokales (relatives) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ falls

$$f'(x_0) = 0 \text{ und } \left\{ \begin{array}{l} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{array} \right.$$

Beispiel: - $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f'(x_0) = 0$ für $x_0 = 0$

$$f''(x_0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum}$$



- $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(x_0) = 0$ für $x_0 = 0$

$$f''(x) = 6x, \quad f''(x_0 = 0) = 0 \Rightarrow \text{keine Entscheidung}$$

$$f'''(x) = 6$$

Ist die n 'te Ableitung die erste Ableitung, die bei x_0 nicht verschwindet, also

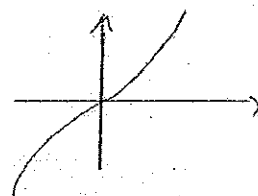
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

dann gilt:

n gerade $\Rightarrow$ f hat Extremum bei x_0 , $\left\{ \begin{array}{l} f^{(n)}(x_0) < 0 : \text{lokales Max} \\ f^{(n)}(x_0) > 0 : \text{lokales Min} \end{array} \right.$

n ungerade $\Rightarrow$ Wendepunkt bei x_0

Beispiel: $f(x) = x^3$: $f'(0) = f''(0) = 0$, $f''' = 6$



Bemerkungen

(i): Stellen an denen $f(x)$ nicht differenzierbar ist
sowie an Randpunkten müssen gesondert
betrachtet werden

(ii): Wenn gilt $f(x_0) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} \right\} f(x) \quad \forall x \in D$

liegt ein absolutes $\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$ vor.

Beispiel