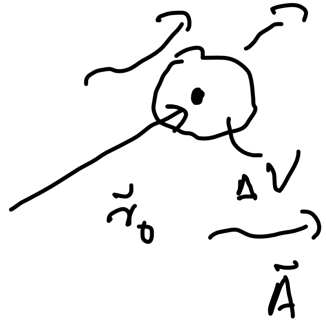
Sätze von Gauß und Stokes

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_0) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

∂V = "Rand von ΔV"



$\oiint \vec{A} \cdot d\vec{F}$ ist der Fluss des Vektorfeldes $\vec{A}$ durch die Fläche

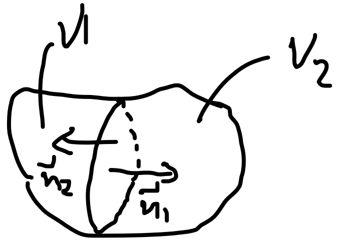
$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{r}_0) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Für endliche Volumina

$$V = \bigcup_{i=1}^{N} V_i$$

$$\Rightarrow \quad \oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \oiint_{\partial V_i} \vec{A} \cdot d\vec{F} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \, (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \, dV$$



$$\oiint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \oiint_{\partial V_1} \vec{A} \cdot d\vec{F} + \oiint_{\partial V_2} \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

$$V = V_1 \cup V_2$$

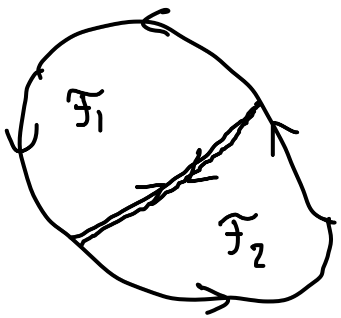
$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_N \qquad \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \neq \emptyset \quad i \neq j$$

Zerlegung der Fläche in disjunkte Teilflächen

Dann gilt:

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\partial \mathcal{F}_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Im limes $N \to \infty$ $\quad \Delta F_i \to 0$



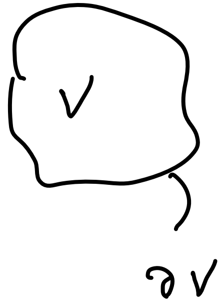
$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta F_i \frac{1}{\Delta F_i} \oint_{\partial \mathcal{F}_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$= \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta F_i \, \vec{n}_i \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i =$$

$$d\vec{F} = \Delta F_i \, \vec{n}_i \qquad = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{F}$$

Gauß:

$$\boxed{\oiint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{F} = \iiint_{V} \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV}$$



Stokes:

$$\boxed{\oint_{\partial F} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \iint_{F} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{F}}$$

Integralform der Maxwell'schen Gleichungen

Gauß'sches Gesetz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

$\vec{E}$: elektrische Feld

ρ_e: elektrische Ladungsdichte

ε_0: Dielektrizitätskonstant

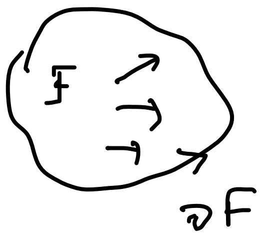
Integral über ein Volumen:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_e \, dV = \frac{\text{Ladung in } V}{\varepsilon_0}$$

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{F} = \text{Fluß des elektrischen Feldes durch die Randfläche von } V$$

Induktionsgesetz:

$$\breve{\nabla}\times\breve{E} = -\frac{\partial \breve{B}}{\partial t}$$



$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_F \breve{B}\cdot d\breve{F} = \int_F (\breve{\nabla}\times\breve{E})\cdot d\breve{F} = \oint_{\partial F} \breve{E}\cdot d\breve{r}$$

$-\frac{\partial}{\partial t}$ (Fluß von $\breve{B}$ durch F) = Umlaufintegral von $\breve{E}$ um den Rand von F

Gauß'sches Gesetz des Magnetismus:

$$\breve{\nabla}\cdot\breve{B} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \breve{B}\cdot d\breve{F} = 0$$

: Fluß von $\breve{B}$ durch beliebige geschlossene Fläche ist Null

Ampèresches Gesetz:

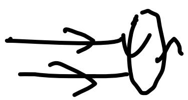
$$c_0^2 \, \tilde{\nabla} \times \tilde{B} = \frac{\tilde{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}$$

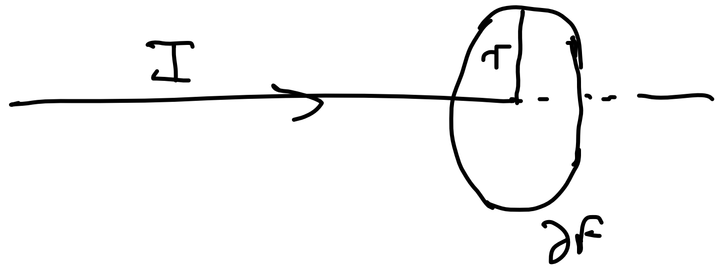
$\tilde{j}$ = elektrische Stromdichte

Strom durch F $= \int_F \tilde{j} \cdot d\tilde{F}$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \int_F \tilde{j} \cdot d\tilde{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \tilde{E} \cdot d\tilde{F} = c_0^2 \int_F (\tilde{\nabla} \times \tilde{B}) \cdot d\tilde{F} = c_0^2 \oint_{\partial F} \tilde{B} \cdot d\tilde{r}$$

$$\frac{\text{Strom durch } F}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{Fluß von } \tilde{E} \text{ durch } F \right) = c_0^2 \left(\begin{array}{l} \text{Umlaufintegral von } \tilde{B} \\ \text{um den Rand von } F \end{array} \right)$$



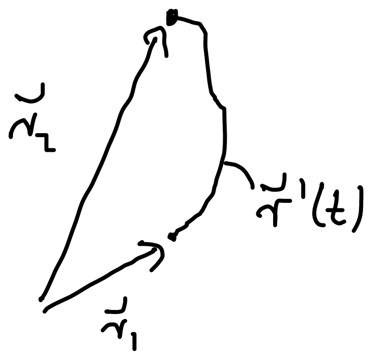


$$\oint_{\partial F} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{\varepsilon_0}$$

$$\parallel$$

$$B \cdot 2\pi r = \frac{I}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{I}{2\pi \varepsilon_0 r}$$

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen



$\vec{F}(\vec{r})$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}\,'(t)) \cdot \frac{d\vec{r}\,'}{dt}\, dt$$

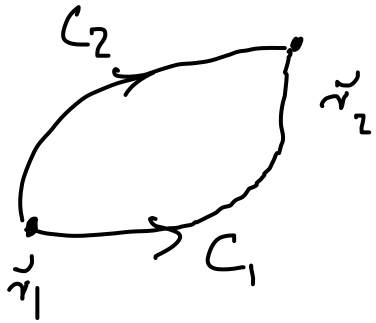
$\vec{r}\,'(t) \qquad t_1 \leq t \leq t_2$

$\int_C \vec{F} \cdot d r$ wegunabhängig bei fixen Randpunkten

C: Kurve, die $\vec{r}_1$ mit $\vec{r}_2$ verbindet

$\Leftrightarrow \quad \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ Wegintegral über geschlossene Kurven

$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$



$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

$$\|$$

$$\oint_{\text{"}C_1 - C_2\text{"}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

gegeben ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}$ ist ein Gradientenfeld

$\vec{F} = \vec{\nabla} f \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{r}) = \text{const} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Da $\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ nicht vom Weg zwischen $\vec{r}_0$ und $\vec{r}$ abhängt

Falls $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$, kann man eine beliebige Kurve wählen

z.B. $\vec{r}_0 = \vec{0}$

$$\vec{r}\,'(t) = t\,\vec{r} \qquad 0 \le t \le 1$$

$$\vec{r}\,'(t=0) = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{r}\,'(t=1) = \vec{r}$$

$$f(\vec{r}) = f_0 + \vec{r} \cdot \int_0^1 \vec{F}(t\vec{r})\,dt \qquad (*)$$

Falls $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ dann gilt $\vec{\nabla} f = \vec{F}$ mit $f(\vec{r})$ gegeben durch $(*)$

$$f(\vec{r}) = f_0 + \int_0^1 \left[\vec{F}(t\vec{r}) \cdot \vec{r}\right] dt$$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \qquad$ zB. $\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

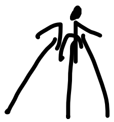
Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ kann zerlegt werden in

$$\vec{F} = \vec{F}_{div} + \vec{F}_{rot} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rot} &= 0 \iff \vec{F}_{rot} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{\nabla} \times \vec{F}_{div} &= 0 \iff \vec{F}_{div} = \vec{\nabla} f \end{aligned}$$

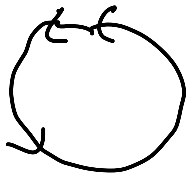
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{div}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F}_{rot}$$

Allgemeines Vektorfeld kann zerlegt werden in einen Teil mit Divergenz aber keine Rotation ($\vec{\nabla} \times \vec{F}_{div} = 0$) und einen Teil mit Rotation aber ohne Divergenz ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rot} = 0$)



"Quellenfeld" mit Divergenz



"Rotationsfeld": geschlossene Feldlinie
ohne Quelle