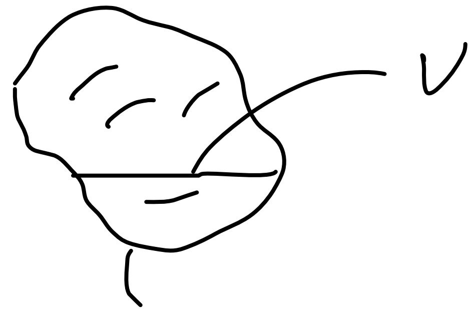
Vektoranalysis

Vektorfeld $\vec{A}(\vec{r})$

1. Gaußscher Integralsatz

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\,dV = \iint_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{F}$$



∂V = "Randfläche von V"

2. Stokesscher Integralsatz

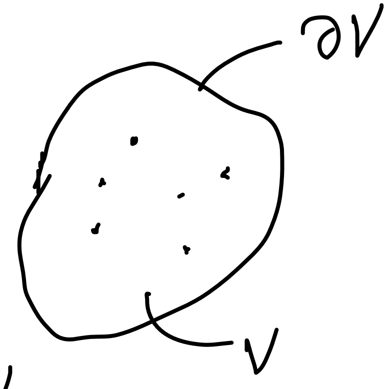
$$\iint_F (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{F} = \oint_{\partial F} \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

∂F ist die Begrenzungskurve von F.

Beispiel aus der Physik:

Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$



$$\iiint \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \rho_e\, dV$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0}\,\text{Gesamtladung im } V$$

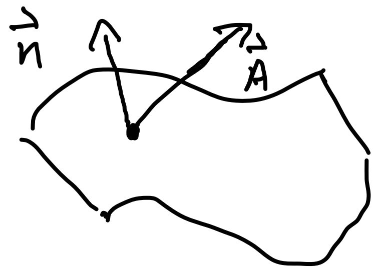
$$= \iint_{\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{F}$$ = "Fluß des Vektorfeldes $\vec{E}$ durch die Fläche $F = \partial V$"

$$\vec{E} = E_r \, \vec{e}_r$$

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{F} = E_r \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

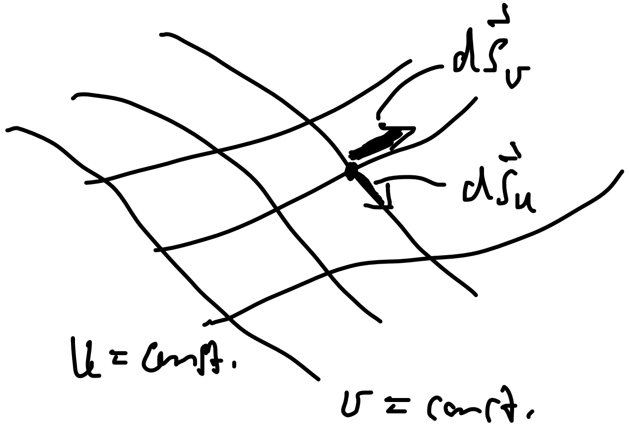
$$\Rightarrow \quad E_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

Oberflächenintegrale von Vektorfeldern



$\vec{n} \cdot \vec{A}$

$$F = \{ \vec{r} = \vec{r}(u,v) \mid u,v \in D \} \qquad D \subset \mathbb{R}^2$$

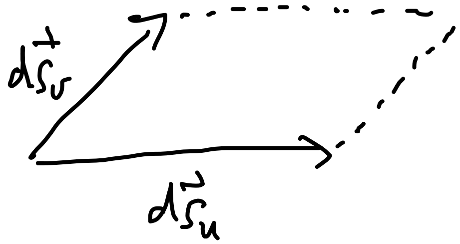


$$d\vec{s}_u = \vec{r}(u+du,v) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$$

$$d\vec{s}_v = \vec{r}(u,v+dv) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

$$\vec{r}_u := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \quad ; \quad \vec{r}_v := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

Flächenelement



$$d\vec{F} = d\vec{s}_u \times d\vec{s}_v = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, du \, dv$$

$$dF = |d\vec{F}| = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, du \, dv$$

$$d\vec{F} = \vec{n}_F \, dF \qquad \vec{n}_F = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$$

Beispiel: Kugeloberfläche (Kugel mit Radius r):

$$d\vec{F} = \vec{e}_r \, r^2 \, d\Omega$$

$d\Omega$ = Raumwinkelelement
= Flächenelement auf der Einheitskugel

Der Fluß eines Vektorfeldes $\vec{A}$ durch eine Fläche $\mathcal{F}$ ist dann definiert durch

$$\Phi := \int_{\mathcal{F}} \vec{A}\cdot d\vec{F} = \iint \underbrace{\vec{A}\big(\vec{r}(u,v)\big)}_{\text{Zahl}} \cdot \big(\underbrace{\vec{r}_u}_{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}} \times \underbrace{\vec{r}_v}_{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}\big)\, du\, dv$$

Beispiel: radiales elektrisches Feld auf der Kugeloberfläche

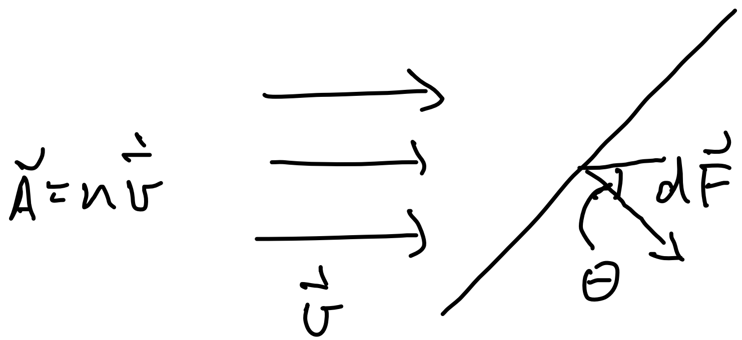
$$d\vec{F} = \vec{e}_r\, r^2\, d\Omega$$

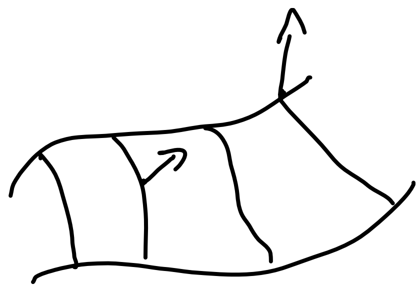
$$\Phi = \int \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{F} = \int E_r\, r^2\, d\Omega = 4\pi r^2 E_r$$

Beispiel: Teilchen mit Dichte n bewegen sich mit (konstanter) Geschwindigkeit $\vec{v}$ in eine vorgegebene Richtung

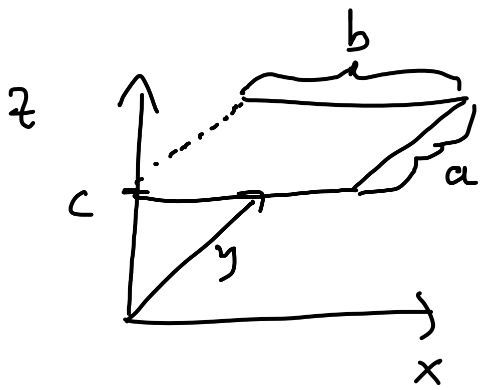
$$\vec{A} = n \cdot \vec{v}$$

$$d\Phi = \vec{A} \cdot d\vec{F} = \vec{A} \cdot \vec{n}_F \, dF = n \, \vec{v} \cdot \vec{n}_F \, dF$$
$$= n |\vec{v}| \cos\Theta \; dF$$





Beispiel:



$0 \le x \le b$

$0 \le y \le a$

$z = c$

$$\breve{A}(\breve{r}) = y^2\,\breve{e}_x + 2xy\,\breve{e}_y + (3z^2 - x^2)\,\breve{e}_z$$

$$d\breve{F} = \breve{e}_x \times \breve{e}_y\,dx\,dy = \breve{e}_z\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow \quad \breve{A}\cdot d\breve{F} = (3z^2 - x^2)\,dx\,dy = (3c^2 - x^2)\,dx\,dy$$

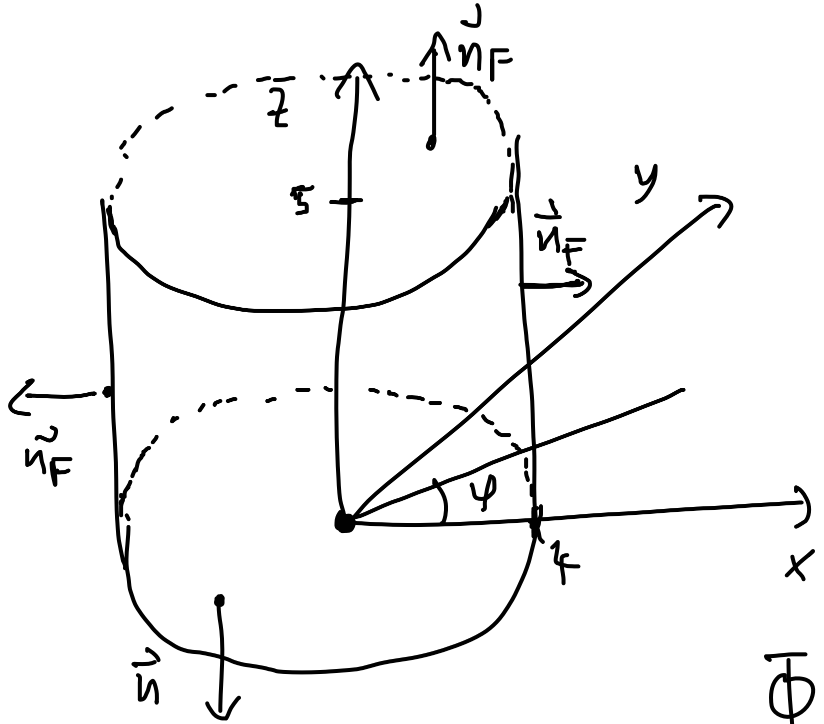
$$\Phi = \iint_F \breve{A}\cdot d\breve{F} = \int_0^b\int_0^a (3c^2 - x^2)\,dy\,dx = a\int_0^b (3c^2 - x^2)\,dx$$

$$= a\left(3c^2 b - \frac{b^3}{3}\right) = 3ac^2 b - \frac{1}{3}ab^3$$

Beispiel: Oberflächenintegral über eine geschlossene Zylinderfläche

$$F = \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 = 16 \,;\ 0 \leq z \leq 5 \} \rightarrow \text{Seitenfläche}$$

$$+ \{ (x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 16 \,;\ z = 0,5 \} \rightarrow \text{Boden und Deckel}$$



Boden: $\vec{n}_F = (0,0,-1)$

Deckel: $\vec{n}_F = (0,0,+1)$

Seitenfläche $\vec{n}_F = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$

$\vec{A}(\vec{r}) = (x,\ zy,\ y^2 z)$

$\Phi = 600\pi$

$$\Phi = \underset{\text{Zylinderoberfläche}}{\iint} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \underset{\text{Zylinder}}{\iiint} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1 + z + y^2$$

$$\underset{\text{Zylinder}}{\iiint} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, dV = \underset{\text{Zylinder}}{\iiint} (1+z+y^2) \, dx\,dy\,dz = \int_0^4 \int_0^5 \int_0^{2\pi} (1+z+r^2 \sin^2\varphi) \cdot r\,d\varphi\,dz\,dr$$

verwende Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, z

$$dV = dx\,dy\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

$$= \int_0^4 \int_0^5 \left(2\pi r(1+z) + \pi r^3\right) dz\,dr = \pi \int_0^4 \left(10r + 2 \cdot \frac{25}{2} r + 5r^3\right) dr$$

$$= \ldots = 600\pi$$

email: guenter.sigl@desy.de