Vektorfelder

bisher: skalare Funktionen von einer oder mehreren Veränderlichen $f(x)$, $f(x_1, \ldots, x_n)$

Vektoren abhängig von einem Parameter z.B. t

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z \rightarrow \text{Kurven}$$

hier: Vektorfelder sind Vektoren abhängig von mehreren Veränderlichen, z.B. dem Ortsvektor $\vec{r}$

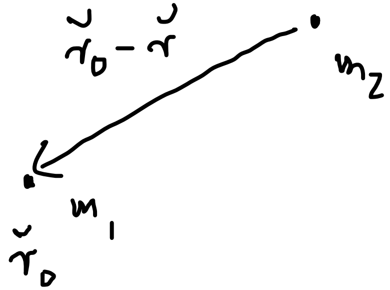
Beispiel: elektrisches Feld $\vec{E}(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Gravitationsfeld

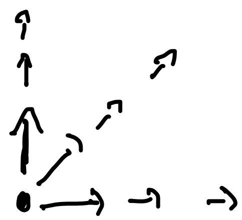
Feld einer Punktladung q_1 oder Punktmasse m_1 bei $\vec{r} = \vec{r}_0$

Kraft ausgeübt auf eine Testmasse m_2

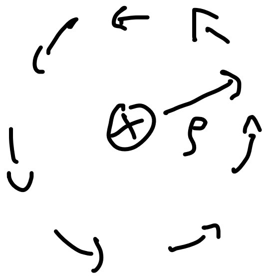
$$\vec{F}_N = - G_N \, m_1 m_2 \, \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \qquad |\vec{F}_N| = \frac{G_N m_1 m_2}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$



$$\vec{F}_Q = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0} \, \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$ elektrostatische Kraft



b) Magnetfelder erzeugt durch einen Linienstrom



$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\rho}\,\vec{e}_\varphi$$

Vektoranalysis

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} := \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

z.B. Maxwellgleichungen $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

Rechenregeln:

i) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\cdot\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$

ii) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{E}) = f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{E}$

Beweis: i) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}+\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(E_x+B_x) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y+B_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z+B_z)$

$$= \vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$$

ii) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{E}) = \frac{\partial}{\partial x}(fE_x) + \frac{\partial}{\partial y}(fE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(fE_z) =$

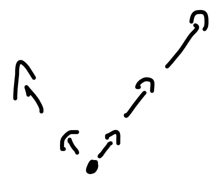
$$= f\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}E_x + \frac{\partial f}{\partial y}E_y + \frac{\partial f}{\partial z}E_z =$$

$$= f\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + (\vec{\nabla}f)\cdot\vec{E}$$

Beispiel 1: $\vec{E} = \vec{a} = \text{const.} \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

B 2: $\vec{E} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 1+1+1 = 3$$



B3: $\vec{E} = r^n\,\vec{r}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = r^n\,\vec{\nabla}\cdot\vec{r} + (\vec{\nabla} r^n)\cdot\vec{r} = 3r^n + n\,r^{n-2}\,\vec{r}\cdot\vec{r} = (3+n)\,r^n$$

Regel ii)
mit $f = r^n$ und $\vec{E} = \vec{r}$

$$\underline{\vec{\nabla} r^n = n\,r^{n-2}\,\vec{r}}$$

$$\vec{\nabla} r^n = \frac{\partial r^n}{\partial r}\,\vec{e}_r = n\,r^{n-1}\,\vec{e}_r = n\,r^{n-1}\,\frac{\vec{r}}{r} = n\,r^{n-2}\,\vec{r}$$

Rotation eines Vektorfeldes $\vec{E}$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) +$$

$$+ \vec{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

eine weitere Maxwellgleichung (Induktionsgesetz) lautet

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Rechenregeln:

i) $\vec{\nabla} \times (\vec{E} + \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$

ii) $\vec{\nabla} \times (f \vec{E}) = f (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + (\vec{\nabla} f) \times \vec{E}$

Früher: $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) + \vec{e}_y (A_z B_x - A_x B_z) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x)$

B1: $\vec{E} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right) = \vec{0}$$

B2: $\vec{E} = f(r)\,\vec{r}$ radiales Vektorfeld

$$\underset{\text{Regel ii)}}{\vec{\nabla}\times\vec{E}} = f\,\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{r}}_{=0} + \underbrace{\vec{\nabla}f}\times\vec{r} = 0$$

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r}$$

$\Rightarrow$ Die Rotation jedes beliebigen radialen Vektorfeldes ist Null

B2: $\vec{E} = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{e}_z\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \vec{0} \quad \text{da} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \text{ etc.}$$

Es gilt auch

$$\breve{\nabla}\cdot\left(\breve{\nabla}\times\breve{E}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial x}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\frac{\partial E_y}{\partial x}} - \cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}\right) = 0$$

für jedes beliebige Vektorfeld $\breve{E}$

in Worten: Die Divergenz einer Rotation ist immer Null

hängt zusammen mit einer weiteren Maxwell-Gleichung:

$$\breve{\nabla}\cdot\breve{B} = 0 \qquad \text{da} \qquad \breve{B} = \breve{\nabla}\times\breve{A}$$

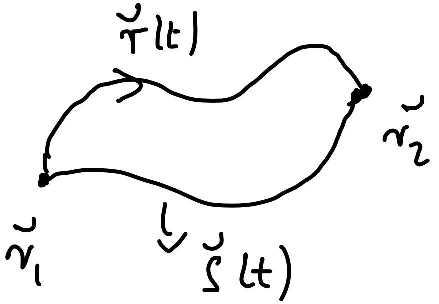
vgl. $\breve{\nabla}\cdot\breve{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

bedeutet daß es keine magnetischen Monopole gibt

Für ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist das Wegintegral definiert durch

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$$

wobei $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}(t_{1,2})$



Dieses Wegintegral ist genau dann wegunabhängig (d.h. hängt nur von Anfangs- und Endpunkt $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$ ab) wenn

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

Wir betrachten den Fall $\vec{F} = -\vec{\nabla} f$ dann ist f das "Potential"

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} = (\vec{\nabla} f)\cdot\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} (\vec{\nabla} f)\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt}\, dt$$

$$= -f\Big|_{t_1}^{t_2}$$

Sei umgekehrt $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ wegunabhängig, dann definiere

$$f(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{\nabla} f$$

Ein Vektorfeld läßt sich als Gradient einer skalaren Funktion $f(\vec{r})$ schreiben

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} f$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{sind wegunabhängig sind}$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

(wird später wegen Satz von Stokes offensichtlich)

Beispiel: Gravitationsfeld einer Punktmasse am Ursprung

$$\vec{F} = -\frac{G_N m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

wir wollen das Potential U finden, so daß $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$

$$U = -\frac{G_N m_1 m_2}{r}$$

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r = + \frac{G_N m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = - \vec{\nabla} U$$

Weitere Rechenregeln:

i) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

ii) $\vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})$

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} := B_x \frac{\partial}{\partial x} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$\Rightarrow (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$ hat z.B. die x-Komponente

$$B_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + B_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

iii) $\breve{\nabla} \times (\breve{\nabla} \times \breve{E}) = \breve{\nabla} (\breve{\nabla} \cdot \breve{E}) - (\breve{\nabla} \cdot \breve{\nabla}) \breve{E}$

$\breve{\nabla} \cdot \breve{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} =: \Delta$ Lagrange-Operator

$\breve{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

$\Delta \breve{E} = 0$ Poisson-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \breve{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \breve{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \breve{E}}{\partial z^2} = 0$$

Zusammenfassung $\breve{\nabla} \cdot \breve{E}$ Divergenz $\rightarrow$ Skalar

$\breve{\nabla} \times \breve{E}$ Rotation $\rightarrow$ Vektor

Gauß: $\int_V \breve{\nabla} \cdot \breve{E} \, dV = \int_{\partial V} \breve{E} \cdot d\breve{A}$

Stokes: $$\int_A (\tilde{\nabla} \times \tilde{E}) \cdot d\tilde{A} = \oint_{\partial A} \tilde{A} \cdot d\tilde{r}$$