

Exponential fkt

1.5

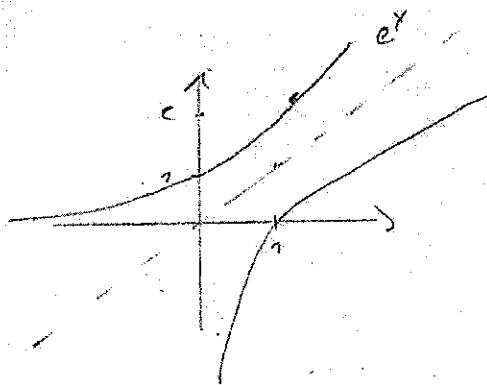
$$f(x) = e^x := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{unendliche Reihe})$$

$$e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots = 2,718\dots \quad \text{Euler Zahl}$$

alternativ Def:

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$D = \mathbb{R}, W = \mathbb{R}^+$$



Umkehrfkt: (natürlicher) Logarithmus

$$f(x) = \ln(x) \quad \text{mit} \quad e^{\ln x} = x = \ln e^x$$

$$D = \mathbb{R}^+, W = \mathbb{R}$$

Eigenschaften (ohne Beweis)

$$- e^x > 0$$

$$- e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

$$- \ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$- \ln x^n = n \ln x$$

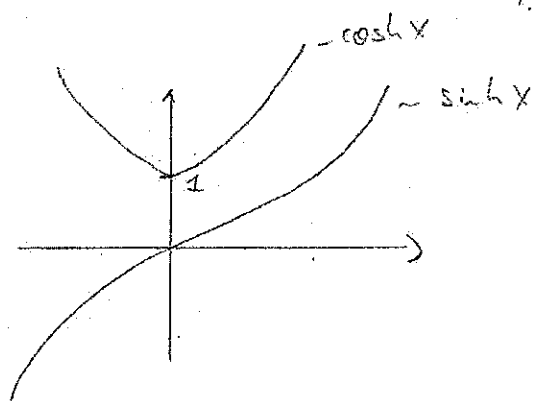
$$(e^x)^a = e^{x \cdot a}, \quad x, a \in \mathbb{R}$$

Hyperbolic fct

1.6

$$\sinh x := \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}), \quad D = \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}$$

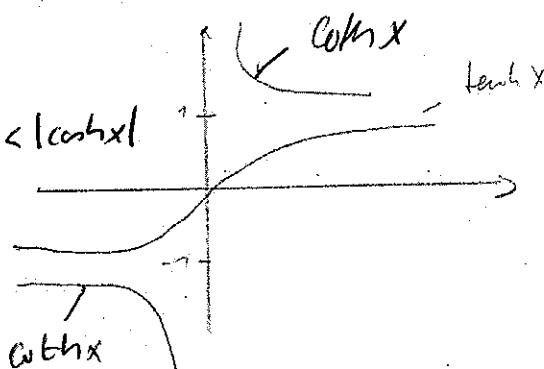
$$\cosh x := \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad D = \mathbb{R}, \quad W = [1, \infty]$$



$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$D = \mathbb{R}$$

$$W = (-1, 1); |\sinh x| < |\cosh x|$$



$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$W = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

Exercise 1: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4} (e^x - e^{-x})^2$

$$= \frac{1}{4} \left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x} \right) = 1$$

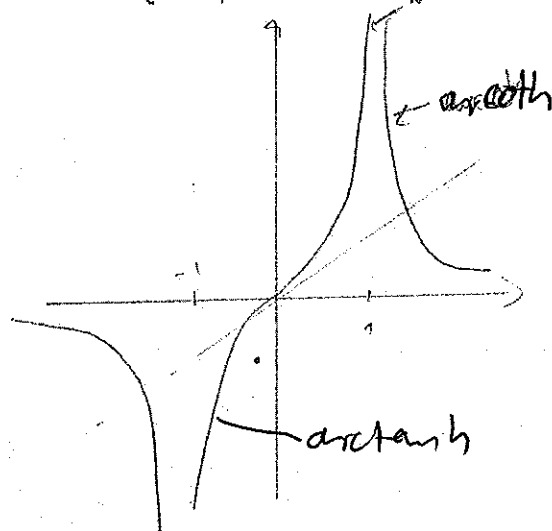
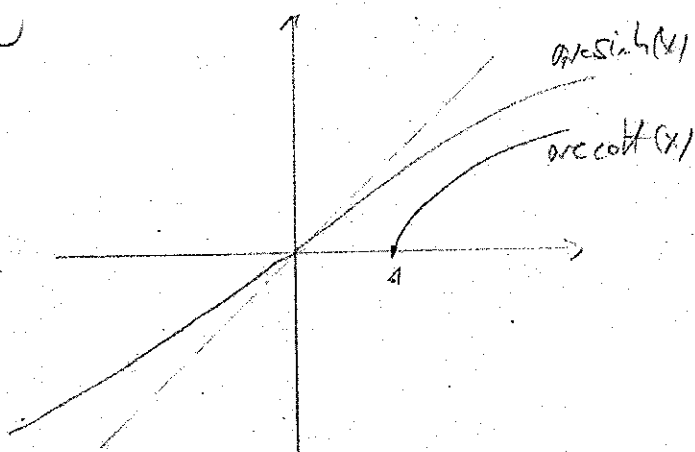
Inverse fct

$$\operatorname{arcosh} x, \quad D = [1, \infty], \quad W = \mathbb{R}^+$$

$$\operatorname{arsinh} x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{artanh} x, \quad D = (-1, 1), \quad W = \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arcoth} x, \quad D = (-\infty, -1) \cup (1, \infty), \quad W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



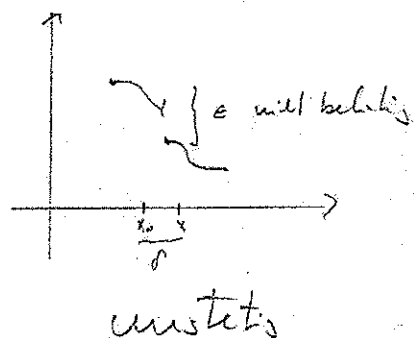
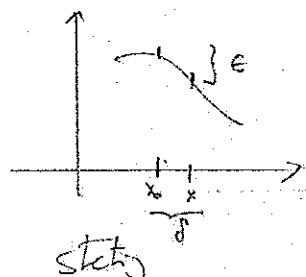
Vorlesung 2: Stetigkeit und Grenzwert von Fkt

2.1

Eine Fkt. f heißt stetig an der Stelle x_0 , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D_f$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

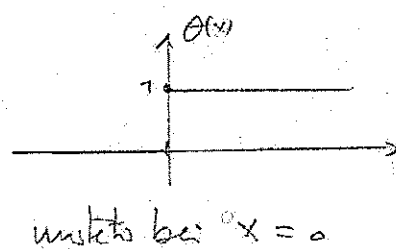
Funktion sind beliebig nah an $f(x_0)$ wenn x beliebig nah an x_0 ist

Beispiel

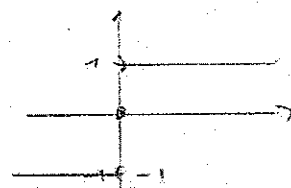


Beispiel für unstetige Fkt:

- Stufenfkt $\Theta(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$



- Vorzeichenfkt $\text{Sign}(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$



Es gilt: Sind $f, g(x)$ stetig, dann ist auch

$$f(x) + g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0), \quad f(g(x))$$

stetig.

Grenzwert von Fkt.

2.2.

$f(x)$ hat für $x \rightarrow x_0$ den Grenzwert y_0 genau
für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass $\forall x \in D$
und $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - y_0| < \epsilon$.

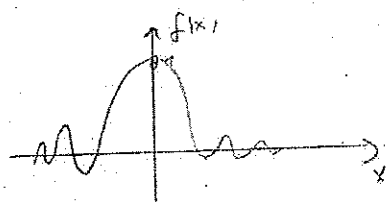
Schreibweise $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$

Wert $f(x)$ sind beliebig nah bei y_0 , wenn x hinreichend nah
von x_0 entfernt ist.]

Für stetige Fkt. gilt $y_0 = f(x_0)$

Für unstetige Fkt. ist differenzielle Analysis unwendig

Beispiel: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Stetigkeit: Grenzwert muss eindeutig
rechtsseitig Grenzwert ($x \rightarrow x_0$ von rechts)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \theta(x) = 1$$

linksseitig Grenzwert ($x \rightarrow x_0$ von links)

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \theta(x) = 0$$

Grenzwert bei $\pm \infty$: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \theta(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \theta(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^2 = \infty \quad (\text{Grenzwert ex. nicht})$$

Rechenregeln:

Für $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = d$ gilt:

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda c + \mu d, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$$

$$- \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$$

Beispiele:

$$- \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = \pm \frac{1}{0} = \pm \infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \underbrace{\alpha}_{\neq 0} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + \beta \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} x}_{=\infty} + \gamma = \pm \infty \quad \begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha < 0 \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\delta x^2 + \epsilon x + \varphi} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overset{\rightarrow 0}{\alpha} + \overset{\rightarrow 0}{\frac{\beta}{x}} + \overset{\rightarrow 0}{\frac{\gamma}{x^2}}}{\underset{\neq 0}{\delta} + \underset{\neq 0}{\frac{\epsilon}{x}} + \underset{\neq 0}{\frac{\varphi}{x^2}}} = \frac{\alpha}{\delta}$$

allgemein:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=0}^n a_i x^i}{\sum_{j=0}^m b_j x^j} = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^{i-n} + 1 \right)}{b_m x^m \left(\sum_{j=0}^{m-1} \frac{b_j}{b_m} x^{j-m} + 1 \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} = \begin{cases} 0 & \text{für } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{für } n = m \\ \pm \infty & \text{für } n > m \quad \left(\frac{a_n}{b_m} > 0 \right) \end{cases}$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} x^m = \infty$$

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} x^{m-1} = \infty$$

$\Rightarrow e^x$ wächst stärker als jede Potenz von x !