Wiederholung von letzter Vorlesung über partielle Ableitungen

$f(x, y, z)$

Änderung von f entlang einer Kurve $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$ totale Ableitung

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$ totale Differential

allgemein $f(x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx^i}{dt} \qquad df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \text{Gradient}$$

$$df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} \qquad \qquad \frac{df}{dt} = \vec{\nabla} f \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

allgemeine Koordinatentransformationen:

$$(x_1, \dots, x_n) \to (y_1, \dots, y_n)$$

$$f(x_1, \dots, x_n) \to f\big(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)\big)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial y_i}}$$

V20: Extrema von Funktionen mehrerer Veränderlicher

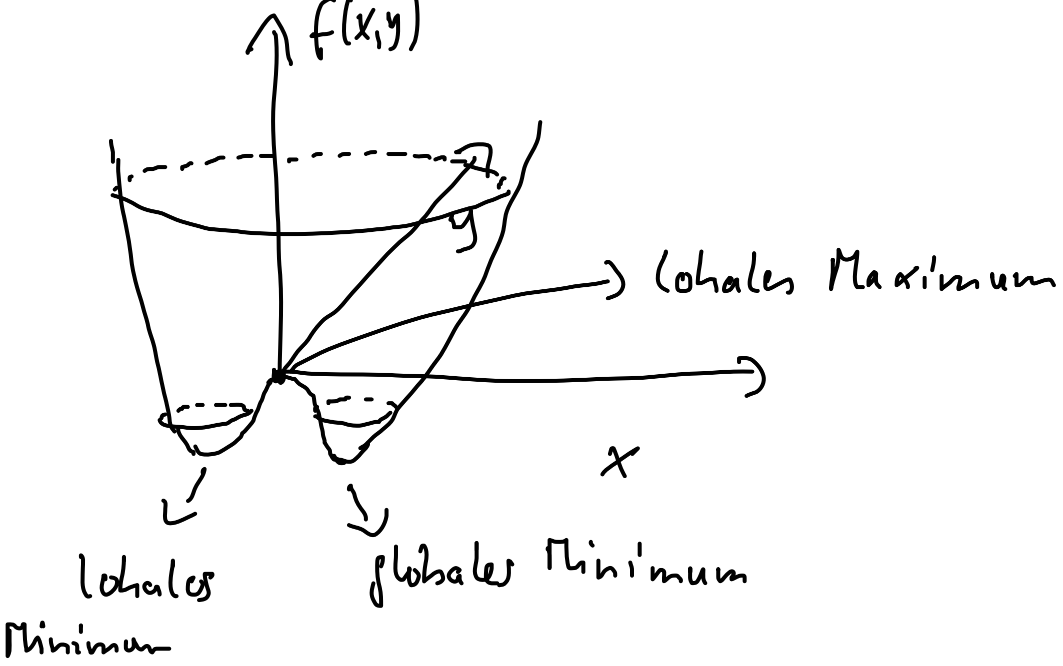
Eine Funktion $f(x_1, .., x_n)$ hat bei $(x_1^0, .., x_n^0)$ ein

$$\left\{\begin{matrix} \text{relatives} \\ \text{absolutes} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right\} \quad \text{falls}$$

$$f(x_1^0, .., x_n^0) \left\{\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}\right\} f(x_1, .., x_n) \quad \left\{\begin{matrix} \text{in einer Umgebung von } (x_1^0 .. x_n^0) \\ \text{auf dem ganzen Definitionsbereich von } f \end{matrix}\right.$$

gilt

$f(x,y)$

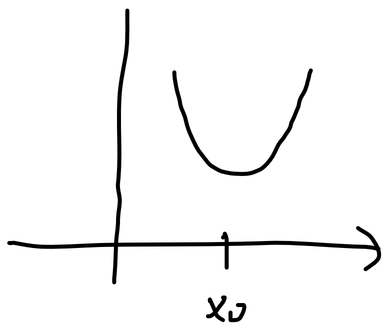


Extremwerte von f liegen an Punkten vor, wo

a) $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \iff \vec{\nabla} f = 0$

kritischer Punkt

b) an Randpunkten



$$\frac{df}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2f}{dx^2} \begin{Bmatrix} > 0 \\ < 0 \end{Bmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{array} \right.$$

Ein $\begin{Bmatrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{Bmatrix}$ liegt vor wenn alle Eigenwerte der

Matrix der 2. Ableitungen

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

(symmetrische Hesse Matrix)

$\begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ sind

Für $n=2$ gilt

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}(a-d)^2}$$

Erinnerung: Eigenwerte λ_i mit Eigenvektoren $\vec{v}_i$ sind definiert durch

$$A \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\det H}{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2}}\,\right]$$

Minimum: $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \Rightarrow \det H > 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

Maximum: $\lambda_1, \lambda_2 < 0 \Rightarrow \det H > 0$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Sattelpunkt : $\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \det H < 0$

Beispiel : $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 6y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff 2x + y = 0 = 2y + x - 6$$

$x = -2, \; y = 4$ kritischer Punkt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \; ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$\Rightarrow$ die Hesse - Matrix $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det H = 4 - 1 = 3 > 0$

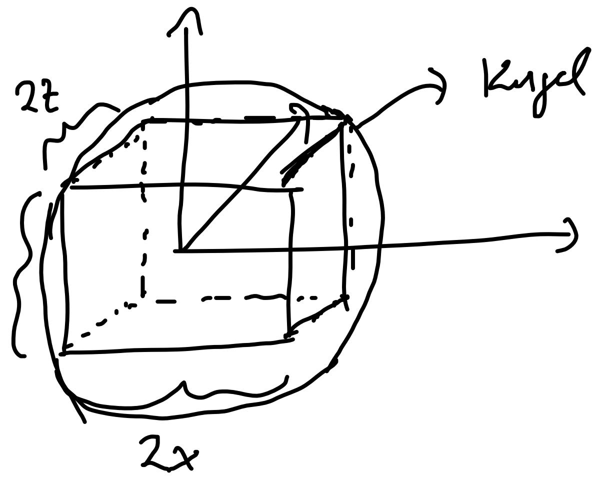
$\Rightarrow$ beide Eigenwerte sind positiv $\Rightarrow$ $(x,y) = (-2,4)$ ist Minimum

Extrema mit Nebenbedingungen

Beispiel: Quader mit Volumen $2x\,2y\,2z$

sei in einer Kugel mit Radius R enthalten

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



Das Volumen V des Quaders soll maximiert werden unter der Nebenbedingung daß die Eckpunkte des Quader auf der Kugel liegen.

$$\Rightarrow \quad 3x^2=R^2 \quad \Rightarrow \quad x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. Lösungsweg:

eliminiere eine der Variablen x, y oder z aus der Bedingung $x^2+y^2+z^2=R^2$ und setze in $V=8xyz$ ein und maximiere dies

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \Rightarrow V(x,y)=8xy\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Problem: Maximiere $V(x,y)$ als Funktion von x und y

einfacher: Betrachte $V^2(x,y) = 64x^2y^2(R^2-x^2-y^2)$

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = 64y^2\left[2x(R^2-x^2-y^2)-2x^3\right] =$$

$$= 128xy^2(R^2-x^2-y^2-x^2) = 128xy^2(R^2-y^2-2x^2)$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial y} = 128yx^2(R^2-2y^2-x^2)$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial x} = \frac{\partial V^2}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y^2 = \frac{R^2}{3} \quad \Rightarrow \quad z^2 = R^2 - x^2 - y^2 = \frac{R^2}{3}$$

$$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{R^2}{3}$$

Alternative: Addiere die Nebenbedingung mit Hilfe eines Langrange Multiplikators λ und definiere

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\, \phi(x, y, z)$$

mit der Nebenbedingung $\phi(x, y, z) = 0$

in unserem Beispiel war $f = V^2 = 64 x^2 y^2 z^2$ und

$\phi = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$

Löse $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 = \frac{\partial F}{\partial \lambda}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \phi(x, y, z) = 0$$

Diese Methode ist nützlich wenn sich $\phi(x,y,z) = 0$ nicht leicht nach eine der Variablen auflösen läßt

In unserem Beispiel

$$F = 64x^2y^2z^2 + \lambda(x^2+y^2+z^2-R^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 128xy^2z^2 + 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 128x^2yz^2 + 2\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 128x^2y^2z + 2\lambda z = 0$$