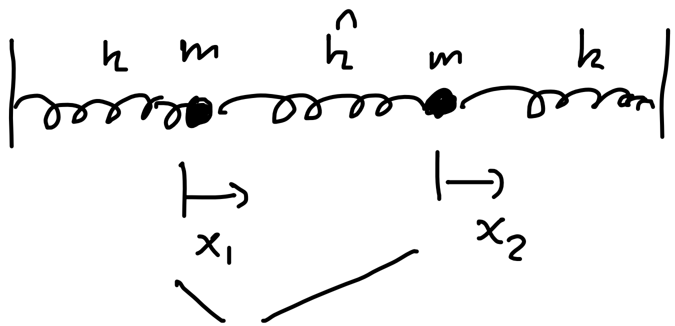
Gekoppelte Schwingungen

2 Massen m über Feder gekoppelt



Gleichgewichtslagen $x_1 = x_2 = 0$

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -k x_1 - \hat{k}(x_1 - x_2) \\
m\ddot{x}_2 &= -k x_2 - \hat{k}(x_2 - x_1)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0
$$

mit $\Omega = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} k+\hat{k} & -\hat{k} \\ -\hat{k} & k+\hat{k} \end{pmatrix}$

Finde Eigenwerte λ
Eigenvektoren $\tilde{x}_\lambda$ von Ω:

$$\Omega \tilde{x}_\lambda = \lambda \tilde{x}_\lambda$$

Ω hat zwei Eigenwerte λ mit Eigenvektoren $\tilde{x}_\lambda$

$$\tilde{x}(t) = (\alpha_1 \cos\omega_1 t + \beta_1 \sin\omega_1 t)\, \tilde{x}_{\lambda_1} +$$
$$+ (\alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t)\, \tilde{x}_{\lambda_2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \lambda_{1,2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\overset{\overset{\lambda_1}{\shortparallel}}{\omega_1^2}(\alpha_1 \cos\omega_1 t + \beta_1 \sin\omega_1 t)\, \tilde{x}_{\lambda_1}$$
$$- \underset{\underset{\lambda_2}{\shortparallel}}{\omega_2^2}(\alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t)\, \tilde{x}_{\lambda_2}$$
$$= -\Omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lösung hat 4 freie Parameter $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, die $x_1(t=0), x_2(t=0)$, $\dot{x}_1(t=0), \dot{x}_2(t=0)$ festlegen

Explizite Berechnung von $\lambda_{1,2}$ und $\check{x}_{\lambda_1}, \check{x}_{\lambda_2}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ hat Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}(a-d)^2}$

und Eigenvektoren $\check{x}_{\lambda_1} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1 - a}{b} \end{pmatrix}$; $\check{x}_{\lambda_2} = t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_2 - d}{b} \end{pmatrix}$

hier: $a = d = h + \hat{h}$ $\quad b = -\hat{h}$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = h + \hat{h} \pm \sqrt{\hat{h}^2}$ $\quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = h + 2\hat{h} > 0$

$\lambda_2 = h > 0$

Eigenvektoren:

$\lambda_1 - a = \hat{h}$; $\lambda_2 - d = -\hat{h}$

$$\breve{x}_{\lambda_1} = t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad \breve{x}_{\lambda_2} = t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \breve{x}_{\lambda_1} \cdot \breve{x}_{\lambda_2} = 0$$

$$\breve{x}_{\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \quad ; \quad \breve{x}_{\lambda_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \breve{x}_{\lambda_1}^2 = \breve{x}_{\lambda_2}^2 = 1$$

$$x_1 = \alpha_1 \cos\omega_1 t + \beta_1 \sin\omega_1 t + \alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t$$
$$x_2 = -\alpha_1 \cos\omega_1 t - \beta_1 \sin\omega_1 t + \alpha_2 \cos\omega_2 t + \beta_2 \sin\omega_2 t$$

$$\omega_1 = \sqrt{k + 2\hat{k}} \qquad \omega_2 = \sqrt{k}$$

physikalische Interpretation:

Eigenwert λ_2 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Massen bewegen sich symmetrisch $\bullet\!\longrightarrow$ $\bullet\!\longrightarrow$ mit Frequenz ω_2

Eigenwert λ_1 mit Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Massen bewegen sich entgegengesetzt

$\bullet\!\!\longrightarrow \quad \longleftarrow\!\!\bullet$ mit Frequenz $\omega_1 > \omega_2$

$x_1 = -x_2$

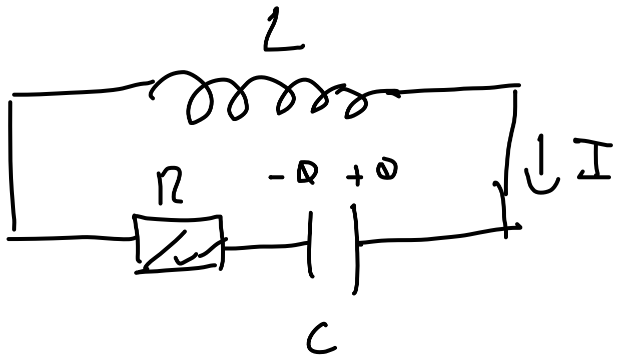
$x_1^0 := x_1(t=0) = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad x_2^0 := x_2(t=0) = \alpha_2 - \alpha_1$

$\Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\left(x_1^0 + x_2^0\right) \qquad \alpha_1 = \frac{1}{2}\left(x_1^0 - x_2^0\right)$

$v_1^0 := \dot{x}_1(t=0) = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 \qquad v_2^0 := \dot{x}_2(t=0) = \beta_2\omega_2 - \beta_1\omega_1$

$\Rightarrow \quad \beta_1 = \frac{1}{2\omega_1}\left(v_1^0 - v_2^0\right) \quad ; \quad \beta_2 = \frac{1}{2\omega_2}\left(v_1^0 + v_2^0\right)$

Nicht-mechanische Schwingung



L = Impedanz (Induktion)

C = Kapazität (Kondensator)

R = Widerstand

Gesamtspannung $\quad U = 0 = L \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI$

Differentiation: $\quad I = \frac{dQ}{dt}$

$$\Rightarrow L \frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

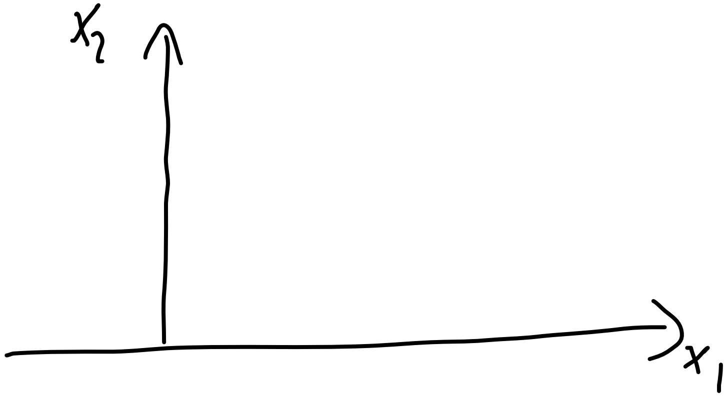
$\Rightarrow$ Für $R = 0 \qquad Q = Q_0 e^{i\omega t} \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{Q_0} L(-\omega^2)\cancel{e^{i\omega t}} + \frac{\cancel{Q_0 e^{i\omega t}}}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 L + \frac{1}{C} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

---

2. Anwendung von Eigenwerten/vektoren: Hauptachsentransformation



$$a x_1^2 + d x_2^2 + 2b x_1 x_2 + e = 0 \quad \rightarrow \text{Kurve in der } (x_1, x_2)\text{-Ebene}$$

Kurve 2. Ordnung $\rightarrow$ Kegelschnitt

tritt u.a. auf bei Beschreibung von Planetenbewegungen

Matrixform der Gleichung

$$\breve{x}^T A \breve{x} + e = 0 \qquad \breve{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \qquad A\breve{x} = \begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ b x_1 + d x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \breve{x}^T A \breve{x} = x_1(a x_1 + b x_2) + x_2(b x_1 + d x_2) = a x_1^2 + d x_2^2 + 2 b x_1 x_2$$

$A = A^T \Leftrightarrow A$ ist symmetrisch

$$\Rightarrow \quad C^T A C = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } C^T C = \mathbb{1} = C C^T$$

C ist orthogonal

$$\Rightarrow \breve{x}^T A \breve{x} = \breve{x}^T \mathbb{1} A \mathbb{1} \breve{x} = \underbrace{\breve{x}^T C}_{\breve{x}'^T} \underbrace{C^T A C}_{= D} \underbrace{C^T \breve{x}}_{\breve{x}'} =$$

$$= \breve{x}'^T D \breve{x}' \qquad \breve{x}' := C^T \breve{x}$$

$$\tilde{x}^T A \tilde{x} = \tilde{x}'^T D \tilde{x}' = \lambda_1 (x_1')^2 + \lambda_2 (x_2')^2$$

$$\boxed{\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + e = 0} \qquad \tilde{x}' = C^T \tilde{x}$$

C ist orthogonal $= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

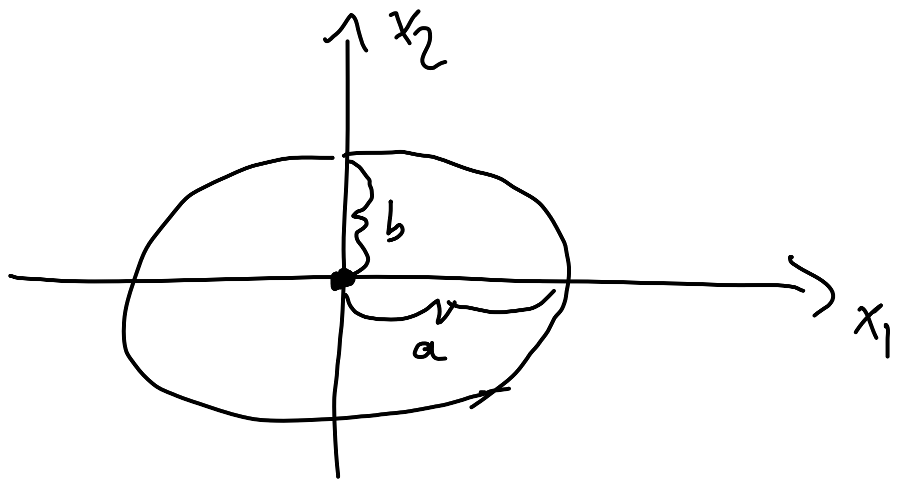
$$x_1' = \cos\varphi \, x_1 + \sin\varphi \, x_2$$
$$x_2' = -\sin\varphi \, x_1 + \cos\varphi \, x_2$$

Fallunterscheidung

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0 \quad ; \quad e < 0 \quad \rightarrow$ Ellipse

$$\frac{\lambda_1}{|e|} x_1^2 + \frac{\lambda_2}{|e|} x_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{|e|}{\lambda_1}} \quad ; \quad b = \sqrt{\frac{|e|}{\lambda_2}} \quad \rightarrow \quad a > b$$



$a =$ große Halbachse ; $b =$ kleine Halbachse

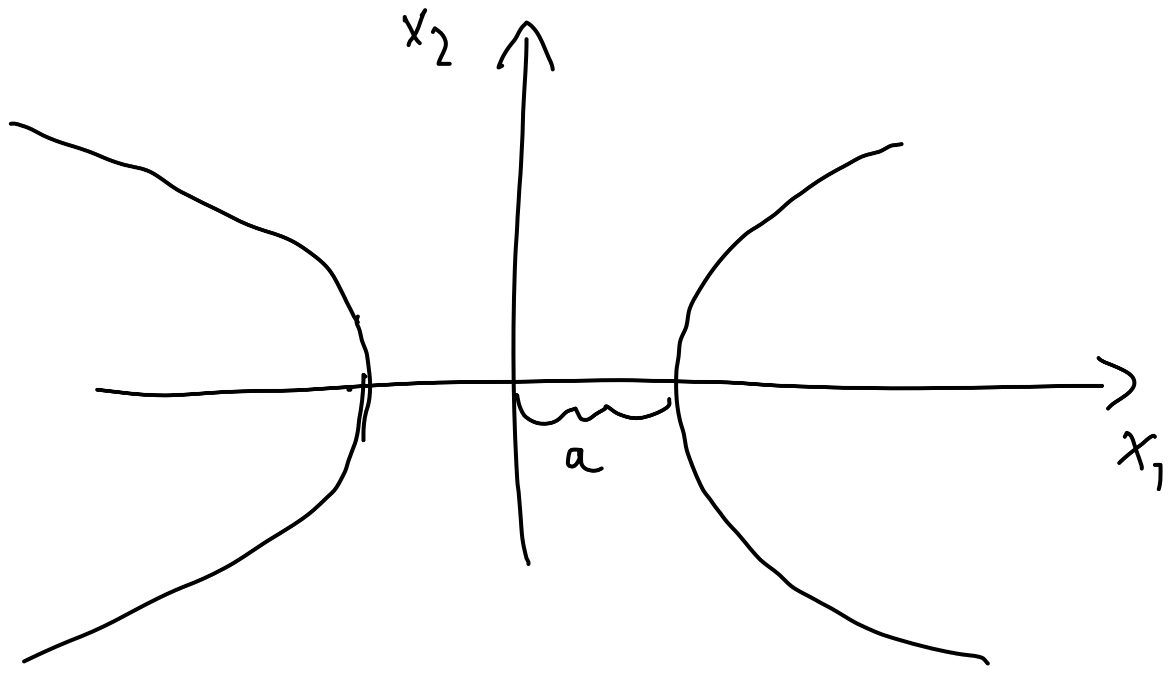
Spezialfall $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow a = b$

$\rightarrow x_1^2 + x_2^2 = a^2 \rightarrow$ Kreis

ii) $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 < 0$; $e < 0$

$$\frac{|\lambda_1|}{|e|} x_1^2 - \frac{|\lambda_2|}{|e|} x_2^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$$

$$a = \sqrt{\frac{|e|}{\lambda_1}} \ ; \quad b = \sqrt{\left|\frac{e}{\lambda_2}\right|}$$



Normalform der Hyperbel

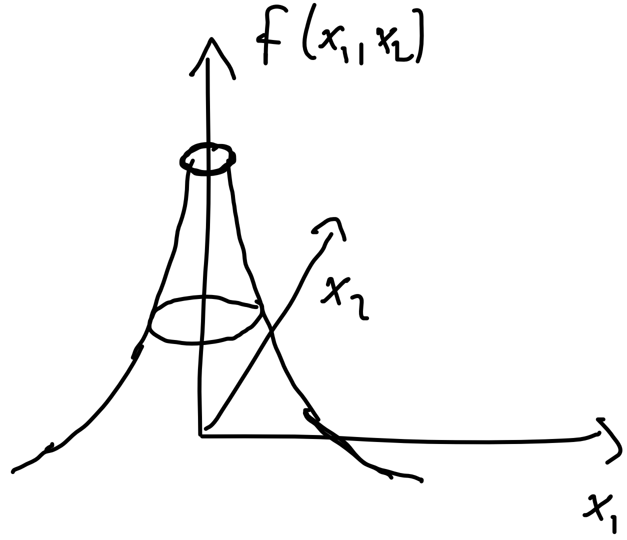
Funktionen mehrerer Veränderlicher

Man definiert $f(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

allgemeiner $f : D \to W \qquad D \subset \mathbb{R}^2 ; W \subset \mathbb{R}$

$$f(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Beispiel: $f(x_1, x_2) = \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2}$



physikalische Anwendung

Temperaturfeld

$$T(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longleftrightarrow (x_1, x_2)$$

$$(x, y, z) \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3)$$

oft wird betrachtet Funktion von 2 oder 3 Variablen

$$f(x_1, x_2)\,, \quad f(x_1, x_2, x_3)$$

Grenzwert einer Funktion

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert so daß

$\forall\ (x,y) \in D$ und $|(x,y)-(x_0,y_0)| < \delta$ folgt $|f(x,y)-a| < \varepsilon$

Hiebei $|(x,y)-(x_0,y_0)| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ ist der Abstand zwischen (x,y) und (x_0,y_0)

Verallgemeinerung: $D \subset \mathbb{R}^n$ ist analog

$$|(x_1, \ldots, x_n) - (x_{10}, \ldots, x_{n0})| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \cdots + (x_n - x_{n0})^2}$$

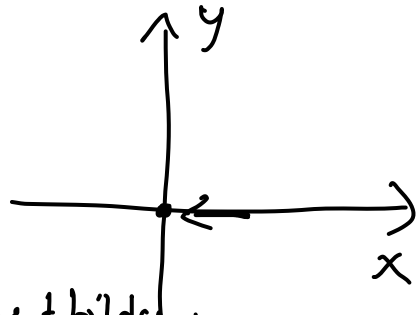
Beispiel 1:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{x_0^2+y_0^2} & \text{falls } x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0 \\ \infty & \text{falls } x_0 = y_0 = 0 \end{cases}$$

Der Grenzwert existiert nicht falls auf verschiedenen Kurven verschiedene oder keine Grenzwerte existieren

Beispiel 2:

$$f(x,y) = \frac{xy}{e^{x^2}-1}$$



$$\rightarrow \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$ $\rightarrow$ Grenzwertbildung entlang der x-Achse

aber Grenzwertbildung entlang der Diagonalen $x = y$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x\, e^{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{-x^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Grenzwert von $f(x,y)$ existiert nicht für $(x,y)\to(0,0)$

Stetigkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Eine Funktion $f(x_1,\dots,x_n)$ heißt stetig am Punkt $(x_1^0,\dots,x_n^0)$ wenn

$$\lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1,\dots,x_n) = f(x_1^0,\dots,x_n^0)$$

Probeklausur 16.1.2014 HS 1 : 10:15 – 11:45
