

VL 12.12. '13

WDH: $A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda \quad (*)$, A quadr. Matrix

Frage (b) Zu jedem λ gehört ein Eigenvektor $\vec{x}_\lambda$, der
 (*) löst (Erinnerung: $(*)$ ~~ist~~)

Beachte: Falls λ n -fach reelle Nullstelle der charakt. Gleichung,
 gibt es n linear unabh. Eigenvektoren

B1: Fall iii) $\lambda_{1/2} = \frac{a+d}{2} \pm \underbrace{\sqrt{b \cdot c + \frac{1}{4}(a-d)^2}}_{>0}$

Löse (*) explizit:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_{1/2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= \lambda_{1/2} x_1 \\ cx_1 + dx_2 &= \lambda_{1/2} x_2 \end{aligned}$$

setze $x_1 = t \Rightarrow x_2 = \frac{1}{b} (\lambda_{1/2} - a) t$

$$\vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{b} (\lambda_1 - a) t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{b} (\lambda_2 - a) t \end{pmatrix}$$

(oder auch: $x_2 = t$)

normierter Eigenvektor: $\vec{v}_{\lambda_{1/2}} = \frac{1}{|\vec{x}_{\lambda_{1/2}}|} \vec{x}_{\lambda_{1/2}}$

Prüfe 2. Gleichung: $c \cdot t + d \cdot \frac{1}{b} (\lambda_{1/2} - a) t = \lambda_{1/2} \cdot \frac{1}{b} (\lambda_{1/2} - a) t \quad | \cdot b; : t$

$$b \cdot c + d (\lambda_{1/2} - a) = \lambda_{1/2} \cdot (\lambda_{1/2} - a)$$

$$\Rightarrow \lambda_{1/2}^2 - (a+d) \lambda_{1/2} + ad - bc = 0$$

$\hookrightarrow$ charakt. Gleichung $\checkmark$

Fall ii) $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a+d}{2}$ $\vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{b}(\frac{d-a}{2})t \end{pmatrix}$, $\vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(\frac{a+d}{2}-d)t \\ t \end{pmatrix}$

Eine $n \times n$ -Matrix heißt diagonalisierbar, falls sie ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist.

Also: $C^{-1}AC = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A .

Symmetrische Matrizen ($S = S^T$) sind diagonalisierbar

Es gilt weiter:

- (i) alle Eigenwerte sind reell
- (ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal
- (iii) Zu jedem Eigenwert der Vielfachheit s gehören s linear unabhängige Eigenvektoren
- (iv) C ist eine orthogonale Matrix (also $C \cdot C^T = \mathbb{1}$) mit Spaltenvektoren, die sich aus den Eigenvektoren aufbauen

Prüfe für: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

(i) Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = \frac{a+d}{2} \pm \underbrace{\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}(a-d)^2}}_{\text{automatisch } \geq 0} \hat{=} 2 \text{ reelle Eigenwerte}$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - a &= \frac{d-a}{2} + \sqrt{\dots} \\ \lambda_2 - d &= \frac{a-d}{2} - \sqrt{\dots} = -(\lambda_1 - a) \end{aligned}$$

(ii) $\vec{x}_{\lambda_1} \cdot \vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{b}(\lambda_1 - a) \cdot t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{b}(\lambda_2 - d)t \\ t \end{pmatrix}$

$$= t^2 \underbrace{\left(\frac{1}{b}(\lambda_2 - d) + \frac{1}{b}(\lambda_1 - a) \right)}_{=0} \quad \checkmark$$

(iii) $\lambda_1 = \lambda_2$ für $a = d, b = 0 \rightarrow 2$ orthogonale Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \quad |\vec{x}_{\lambda_1}| = \sqrt{t^2 \left(1 + \left(\frac{\lambda_1 - a}{b} \right)^2 \right)}, \quad |\vec{x}_{\lambda_2}| = \sqrt{t^2 \left(1 + \left(\frac{\lambda_2 - d}{b} \right)^2 \right)} = |\vec{x}_{\lambda_1}| \\ = |\vec{x}|$$

$$\rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{|\vec{x}|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_2 - d}{b} \\ \underbrace{\frac{\lambda_1 - a}{b}}_{\vec{x}_{\lambda_1}} & \underbrace{1}_{\vec{x}_{\lambda_2}} \end{pmatrix}, \quad C^T = \frac{1}{\sqrt{|\vec{x}|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_1 - a}{b} \\ \frac{\lambda_2 - d}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot C^T = \frac{1}{|\vec{x}|^2} \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\lambda_2 - d}{b} \right)^2 & \frac{\lambda_1 - a}{b} + \frac{\lambda_2 - d}{b} \\ \frac{\lambda_1 - a}{b} + \underbrace{\left(\frac{\lambda_2 - d}{b} \right)}_{=0} & 1 + \left(\frac{\lambda_1 - a}{b} \right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

$\Downarrow$
 0

$\Rightarrow C$ ist orthogonal
(bedeutet auch: $C^T = C^{-1}$)

$$C = \frac{1}{|\vec{x}|} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \quad c = \frac{\lambda_1 - a}{b}$$

$$\begin{aligned} C^T A C &= \frac{1}{|\vec{x}|^2} \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\vec{x}|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bc & -ac+b \\ b+dc & -bc+d \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|\vec{x}|^2} \begin{pmatrix} a+bc+c(b+dc) & -ac+b-bc^2+cd \\ -ac-bc^2+b+dc & ac^2-2bc+d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Neben diagonalelemente:

$$\begin{aligned} -ca - bc^2 + b + dc &= -\left(\frac{\lambda_1 - a}{b}\right)a - \frac{2}{b^2}(\lambda_1 - a)^2 + b + d \frac{\lambda_1 - a}{b} \\ &= \frac{1}{b} \left(-(\lambda_1 - a)a - \lambda_1^2 + 2a\lambda_1 - a^2 + b^2 + \lambda_1 d - da \right) \\ &= \frac{1}{b} \left(-\lambda_1^2 + \lambda_1(a+d) + b^2 - ad \right) = 0 \quad \checkmark \\ &\quad = 0 \quad \hat{=} \text{charakt. Gleichung} \end{aligned}$$

Wdh: $\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - b^2 = \lambda^2 - \lambda(a+d) - b^2 + ad$ 7
 $\stackrel{!}{=} 0$ // Ende Wdh

Spur:

$$a + 2bc + dc^2 + ac^2 - 2bc + d = (a+d) \underbrace{(1+c^2)}_{|\vec{x}|^2} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot |\vec{x}|^2$$

mit Vorfaktor: $\frac{1}{|\vec{x}|^2} \rightarrow \text{Spur} = \lambda_1 + \lambda_2$
 $= \text{Summe der Diagonalelemente von}$
 $D = C^T A C$

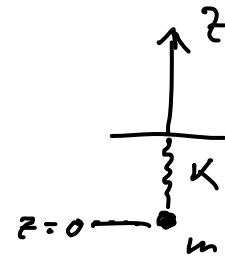
Physikalische Anwendungen der Eigenwertprobleme

1. gekoppelte Schwingungen

zur Erinnerung: harm. Oszillator (ohne Reibung)

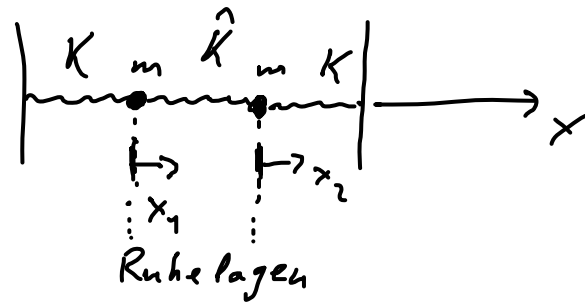
$$F = -K z(t) = m a = m \ddot{z}$$

$$\rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad \omega^2 = \frac{K}{m}$$



lin. DGL 2. Ordnung, Lösung: $z(t) = z_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Jetzt: 2 Massen über Federn gekoppelt ($m_1 = m_2 = m$)



2 Newtonsche Gleichungen:

$$m a_1 = F_1 \Leftrightarrow m \ddot{x}_1 = -K x_1 - \hat{K} x_1 + \hat{K} x_2$$

$$m a_2 = F_2 \Leftrightarrow m \ddot{x}_2 = -K x_2 - \hat{K} (x_2 - x_1)$$

→ 2 gekoppelte DGL 2. Ordnung

$$\ddot{x}_1 + \frac{K}{m} x_1 + \frac{\hat{K}}{m} (x_1 - x_2) = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{K}{m} x_2 + \frac{\hat{K}}{m} (x_2 - x_1) = 0$$

Umschreiben in Matrixform:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \Omega \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

$$\Omega = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} K + \vec{K} & -\vec{K} \\ -\vec{K} & K + \vec{K} \end{pmatrix}$$

Für die Eigenvektoren $\vec{x}_\lambda$ von Ω gilt:

$$\Omega \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda$$

$$\leadsto (*) : \quad \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{matrix} \ddot{x}_1 + \lambda x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \lambda x_2 = 0 \end{matrix}}_{\text{zwei entkoppelte DGL}}$$

Lösung bekannt :

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \\ x_2 &= c_3 \cos(\omega t) + c_4 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

mit $\omega^2 = \lambda$, $c_1, \dots, c_4 \in \mathbb{R}$

aber: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ muss Eigenvektor sein!

$$c_1 = \alpha \hat{c}_1$$

$$c_3 = \alpha \hat{c}_3$$

$$\rightarrow \vec{x} = \vec{x}_\lambda \cdot (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))$$

$$\vec{x}_\lambda = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_3 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \beta \hat{c}_1$$

$$c_4 = \beta \hat{c}_3$$

Prüfe: $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x} \leadsto -\omega^2 \vec{x} + \lambda \vec{x} = 0 \quad \checkmark$

Ω hat 2 Eigenwerte und 2 Eigenvektoren

$\Rightarrow$ allgemeinste Lösung ist Linearkombination:

$$\vec{x} = \vec{x}_{\lambda_1} (\alpha_1 \cos(\omega_1 t) + \beta_1 \sin(\omega_1 t)) + \vec{x}_{\lambda_2} (\alpha_2 \cos(\omega_2 t) + \beta_2 \sin(\omega_2 t))$$

$$\text{mit } \omega_{1/2}^2 = \lambda_{1/2}$$