

Gleichungssystem von m Gleichungen für n Unbekannte:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$m \times 1$ -Matrix $\rightarrow$ Spaltenvektor
mit m Elementen

$m \times n$ -Matrix
mit n Einträgen

$n \times 1$ -Matrix $\rightarrow$ Spaltenvektor

$$m \neq n$$

$$\vec{b} = 0 \rightarrow \text{homogenes Gleichungssystem}$$

$$\vec{b} \neq 0 \rightarrow \text{inhomogen}$$

Man definiert eine erweiterte Matrix $m \times (n+1)$ Matrix

$$M = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Lösungen des Gleichungssystems können von folgender Art sein

	$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$	$A \cdot \vec{x} = 0$
1.) $\text{rg}(M) > \text{rg}(A)$	keine Lösung	$\vec{x} = 0$
2.) $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) = r$		
i) $r = n$	eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$	triviale Lösung $\vec{x} = 0$
ii) $r < n$	Lösungsschar mit $n-r$ freien Parametern	nicht-triviale Lösungen $A \cdot \vec{x} = 0$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 \\ -10x_1 + 16x_2 &= 25 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{155}{2} \quad x_2 = 50$$

$$n = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -10 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 32 - 30 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = 2 = \operatorname{rg}(M)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 80 + 75 \\ 50 + 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 155 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 & (1) \\ -10x_1 + 15x_2 &= 8 & (2) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -10 & 15 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -10 & 15 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \neq \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix} \neq \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 30 - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rg}(A) = 1 < 2 = n$$

$$\operatorname{rg} M = 2$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} M > \operatorname{rg} A$$

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow x_1 &= \frac{1}{2}(5 + 3x_2) \rightarrow \text{in (2)} \rightarrow -\frac{10}{2}(5 + 3x_2) + 15x_2 = 8 \\ &\rightarrow -25 - 15x_2 + 15x_2 = 8 \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 \\ -10x_1 + 15x_2 &= -25 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -10 & 15 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(A) = 1 = \text{rg}(M) \quad \text{da} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -25 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$$

1. parametrische Lösungsschar $x_1 = t \quad t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{1}{3} (2t - 5)$$

2. Gleichung: $-10t + 15 \cdot \frac{1}{3} (2t - 5) =$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{3} (2t - 5) \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &= -10t + 10t - 25 = -25 \quad \checkmark \\ &\text{ist 1 parametrische Lösungsschar} \end{aligned}$$

Gaußsche Algorithmus

Konstruktion von Lösungen durch Umformung von M auf Stufenform

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & b_3 \\ \vdots & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Zu Erinnerung: $\text{rg}(M)$ ist unverändert unter

- i) Zeilen / Spalten vertauschen
- ii) Multiplikation von Zeilen oder Spalten mit Zahl $\alpha \neq 0$
- iii) Addition einer Vielfachen einer Zeile / Spalte zu einer anderen Zeile / Spalte

Für das entsprechende Gleichungssystem bedeutet das

- i) Umbenennung von Variablen erlaubt
- ii) Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\alpha \neq 0$
- iii) Linearkombinationen von Gleichungen

Beispiel:

$$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1$$

$$2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7$$

$$3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Zeile - 2 · Zeile 1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

3. Zeile - 3 · Zeile 1

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Zeile - 2. Zeile

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 &= -5 \end{aligned}$$

$\text{rg}(A) = \text{rg}(M) = 2 \quad \Rightarrow \quad 4 - 2 \text{ freie Parameter}$

Wähle: $x_3 = t_1$; $x_4 = t_2$

$$\Rightarrow x_2 = -1 + x_3 + x_4 = -1 + t_1 + t_2$$

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + 4x_2 - 2x_3 = -1 + 4(-1 + t_1 + t_2) - 2t_1 = \\ &= -5 + 2t_1 + 4t_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Allgemeine Lösung hat die Form

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 + 2t_1 + 4t_2 \\ -1 + t_1 + t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

In der Physik sind Matrix-Gleichungen der Form

$$A \cdot \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

A = quadratische $n \times n$ -Matrix

Von Interesse

λ heißt Eigenwert von A

$\vec{x}_\lambda$ heißt Eigenvektor zum Eigenwert λ von A

Bemerkung: $\vec{x} = 0 \rightarrow$ triviale Lösung

Allgemeine Problem:

a) finde alle Eigenwerte λ

b) finde die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}_\lambda$

$$(A - \lambda \mathbb{1}_n) \vec{x}_\lambda = \vec{0} \quad \text{homogenes Gleichungssystem}$$

nicht-triviale Lösungen existieren $(\Leftrightarrow) \operatorname{rg}(A - \lambda \mathbb{1}_n) < n$

$(\Leftrightarrow) \det(A - \lambda \mathbb{1}_n) = 0 \rightarrow$ charakteristische Gleichung

$\det(A - \lambda \mathbb{1}_n)$ ist ein Polynom n -ten Grades in λ

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$\rightarrow$ Diese Gleichung hat $\operatorname{rg}(A)$ verschiedene Lösungen

Diese Lösungen entsprechen den möglichen Eigenwerten von A

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad a, d \in \mathbb{R} \quad a \neq d$

a) Berechnung der Eigenwerte

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) = 0$$

Lösung: $\lambda_1 = a$; $\lambda_2 = d$ sind die beiden Eigenwerte

b) Was sind die zugehörigen Eigenvektoren?

$$\lambda_1 = a \quad A \cdot \vec{x}_{\lambda_1} = \lambda_1 \vec{x}_{\lambda_1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a x_1 = a x_1 \Rightarrow x_1 = t$$

$$\Rightarrow d x_2 = a x_2 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = d : \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} a x_1 &= d x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ d x_2 &= d x_2 \Rightarrow x_2 = t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Beispiel 2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

charakteristische Gleichung:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - cb = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} + bc - ad} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{bc + \frac{(a-d)^2}{4}}$$

$$\frac{(a+d)^2}{4} - ad = \frac{(a-d)^2}{4}$$

Fallunterscheidung:

i) $bc + \frac{1}{4}(a-d)^2 > 0$: A hat 2 verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$

i') $bc + \frac{1}{4}(a-d)^2 = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a+d}{2}$ ist einziger Eigenwert

ii) $bc + \frac{1}{4}(a-d)^2 < 0$ $\rightarrow$ A hat keine reellen Eigenwerte

Zu jedem λ gehört mindestens ein Eigenvektor $\vec{x}_\lambda$

mit $A \vec{x}_\lambda = \lambda \vec{x}_\lambda$

Beachte: Falls λ n -fache reelle Nullstelle, dann gibt es n linear unabhängige Eigenvektoren zu λ