Quadratische $n \times n$ Matrizen

symmetrisch $\quad A^T = A \iff A_{ij} = A_{ji}$

anti-symmetrisch $\quad A^T = -A \iff A_{ij} = -A_{ji}$

Jede quadratische Matrix läßt sich zerlegen in symmetrischen und anti-symmetrischen Teil

$$A = S + T \qquad S = \frac{1}{2}(A + A^T)$$
$$T = \frac{1}{2}(A - A^T)$$

$$S^T = \frac{1}{2}(A + A^T)^T = \frac{1}{2}\big(A^T + \underbrace{(A^T)^T}_{=A}\big) = \frac{1}{2}(A + A^T) = S$$

$\Rightarrow$ S ist symmetrisch

$$T^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -T$$

$\Rightarrow$ T ist antisymmetrisch

Inverse: $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$

Eine Matrix heißt <u>orthogonal</u> falls $A^T = A^{-1} \Leftrightarrow AA^T = \mathbb{1}$
$= A^T A$

Beispiel 2x2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

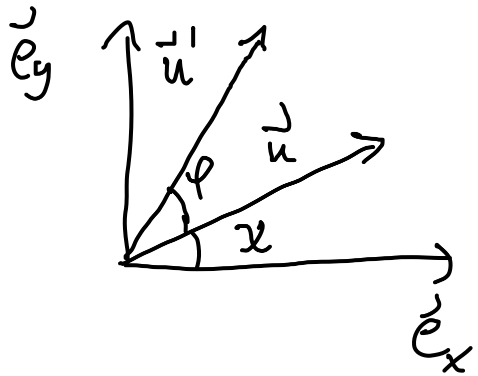
Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = A^T$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

Anwendung:

Drehung eines Vektors in der Ebene um einen Winkel φ

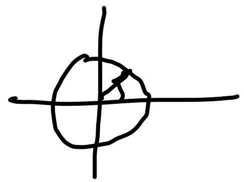


$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$$

$$\vec{u}' = u_x' \vec{e}_x + u_y' \vec{e}_y$$

$$|\vec{u}| = |\vec{u}'| \Leftrightarrow u_x^2 + u_y^2 = (u_x')^2 + (u_y')^2$$

$$u_x = |\vec{u}| \cos\chi \quad ; \quad u_y = |\vec{u}| \sin\chi$$



$$u_x' = |\vec{u}| \cos(\chi + \varphi) \quad ; \quad u_y' = |\vec{u}| \sin(\chi + \varphi)$$

$$u_x' = |\vec{u}'| (\cos\varphi \cos\chi - \sin\varphi \sin\chi) = u_x \cos\varphi - u_y \sin\varphi$$

$$u_y' = |\vec{u}'| (\sin\varphi \cos\chi + \cos\varphi \sin\chi) = u_x \sin\varphi + u_y \cos\varphi$$

$$\begin{pmatrix} u_x' \\ u_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_x \cos\varphi - u_y \sin\varphi \\ u_x \sin\varphi + u_y \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x' \\ u_y' \end{pmatrix}$$

$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ ist eine 2×2 Drehmatrix und ist orthogonal

Eine orthogonale Matrix erhält das Skalarprodukt

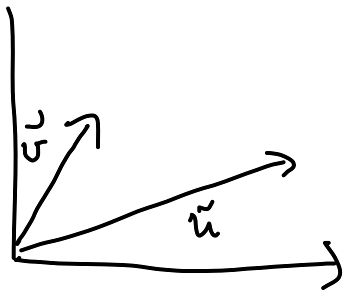
$$\breve{u} \cdot \breve{v} = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = \breve{u}^T \cdot \breve{v} \qquad \breve{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix};\ \breve{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\breve{u}^T = (u_1, \dots, u_n) \Rightarrow \breve{u}^T \cdot \breve{v} = (u_1, \dots, u_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\breve{u}' = D\breve{u} \quad ; \quad \breve{v}' = D\breve{v}$$

$$\breve{u}' \cdot \breve{v}' = (\breve{u}')^T \cdot \breve{v}' = \underbrace{(D\breve{u})^T}_{\breve{u}^T D^T} \cdot D\breve{v} = \breve{u}^T \underbrace{D^T D}_{\mathbb{1}} \breve{v} = \breve{u} \cdot \breve{v}$$

Beispiel: $n=2$



Das Skalarprodukt ist invariant unter einer linearen Transformation durch eine orthogonale Matrix

$$\breve{u}' = D\breve{u} \quad ; \quad \breve{v}' = D\breve{v} \qquad \breve{u} \cdot \breve{v} = \breve{u}' \cdot \breve{v}'$$

Die Determinante einer quadratischen $n \times n$ Matrix ist definiert als

$$\det(A) = |A| := \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}_{\text{"Entwicklung nach } i\text{-ter Zeile"}} \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$$

i ist fest

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} ist diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}}_{\text{Entwicklung nach } j\text{-te Spalte}} \qquad \text{für } j \text{ festgehalten}$$

Beispiel: $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12}$

Entwicklung nach 1. Zeile

$i = 1$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ \cancel{c} & d \end{pmatrix} = d$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} \\ c & \cancel{d} \end{pmatrix} = c$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Beispiel: 3x3 Matrix Entwicklung nach 1. Zeile

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$+\, a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\right)} - a_{12}\left(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\right) + a_{13}\left(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}\right)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \underline{a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right)} - a_{21}\left(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)$$

Es gilt:

i) vertauscht man 2 Zeilen oder 2 Spalten von A so ändert sich das Vorzeichen von $\det A$

ii) Multipliziert man eine Zeile oder eine Spalte mit eine Zahl α $\Rightarrow$ $\det A = \alpha \det A$

iii) Addiert man ein Vielfaches einer Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile bzw. Spalte so bleibt $\det A$ unverändert

iv) $\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)$

$\det(A^T) = \det(A)$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ da $\det \mathbb{1} = 1$

$\Rightarrow \det \mathbb{1} = \det(A \cdot A^{-1}) =$

$= (\det A)(\det A^{-1})$

$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

v) $\det A \neq 0 \iff A^{-1}$ existiert $\iff \operatorname{rg}(A) = n$

Beispiel: $n = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha a \\ b & \alpha b \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 1$$

$\det A = a \alpha b - \alpha a b = 0$ und A^{-1} existiert nicht

Aussage $n = 3$

$$A = (\breve{u}, \breve{v}, \breve{w}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \operatorname{Sp}(\breve{u}, \breve{v}, \breve{w}) = \breve{u} \cdot (\breve{v} \times \breve{w})$$

Zwei Matrizen A, B heißen <u>ähnlich</u> falls es eine invertierbare Matrix C gibt so daß

$$A = C^{-1} B C$$

Es gilt:

i) $Sp(A) = Sp(C^{-1}BC) = Sp(\underbrace{CC^{-1}}_{\mathbb{1}}B) = Sp(B)$

ii) $\det(A) = \det(C^{-1}BC) = \det(C^{-1}) \cdot \det B \cdot \det C = \det B$

Lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen für n Unbekannte hat die Form

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots a_{2n} x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots a_{mn} x_n = b_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{m Gleichung} \\ \text{für n Unbekannte} \\ x_i \quad i=1,\dots,n \end{array}$$

a_{ik} und b_i sind vorgegebene Koeffizienten $\in \mathbb{C}, \mathbb{R}$

$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \longrightarrow$ $(m \times 1)$-Matrix $\to$ Spaltenvektor

$m \times n$-Matrix

$(n \times 1)$-Matrix $\to$ Spaltenvektor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$\tilde{x}$: n-dimensionaler Spaltenvektor

$\tilde{b}$: m-dimensionaler Spaltenvektor

Beispiel 1:

$$2x_1 - 3x_2 = 5 \qquad (1) \qquad a_{11} = 2, \quad a_{12} = -3, \quad b_1 = 5$$

$$-10x_1 + 16x_2 = 25 \qquad (2) \qquad a_{21} = -10, \quad a_{22} = 16, \quad b_2 = 25$$

Lösung (1) $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{1}{2}(5 + 3x_2)$ $\rightarrow$ Einsetzen in (2)

$$\rightarrow \quad -\frac{10}{2}(5 + 3x_2) + 16x_2 = 25$$

$$-25 - 15x_2 + 16x_2 = 25 \quad \rightarrow \quad x_2 = 50$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(5 + 3 \cdot 50) = \frac{155}{2}$$

Übungsblatt 5 Korrektur

Aufgabe 2 ii) $\quad f'(x) + \alpha f(x) = \beta \sin x$