

Wegintegral (Kurvenintegral)

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{Skalarprodukt}} dt$$

$$\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1 ; \quad \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$$

Beispiel: Teilchen der Ladung q in einem konstanten elektrischen Feld $\vec{E}_0 = |\vec{E}_0| \vec{e}_z$

$$W = - \frac{q^2}{2m} |\vec{E}_0|^2 (t_2^2 - t_1^2) < 0$$

entspricht eine Abnahme der potentiellen Energie

Vorlesung 13: Matrizen

Eine $m \times n$ Matrix A ist ein Schema

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

$i = 1, \dots, m$
 $k = 1, \dots, n$

A hat n Spalten und m Zeilen

Beispiel: 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

3×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

2x3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Spezialfall : $m \times 1$ -Matrix = Spaltenvektor $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \vec{a}$

$1 \times n$ -Matrix = Zeilenvektor

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) = (a_1, a_2, \dots, a_n) = (\vec{a})^T$$

=> Eine $m \times n$ -Matrix besteht aus m Zeilenvektoren bzw. n Spaltenvektoren

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \vec{a}_1^T \\ \vdots \\ \vec{a}_m^T \end{pmatrix}$$

Die Transponierte Matrix A^T von A erhält man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{entspricht Spiegelung an der Diagonalen}$$

Wenn A $m \times n$ Matrix, so daß A^T $n \times m$ Matrix ist

$$(A^T)_{ik} = A_{ki} \quad \rightarrow \text{Komponentenschreibweise}$$

$$(A^T)^T = A$$

Zwei Matrizen A und B sind gleich wenn alle Matrixelemente gleich sind

$$A = B \quad (\Leftrightarrow) \quad a_{ik} = b_{ik}$$

$$1 \leq i \leq m ; \quad 1 \leq k \leq n$$

Rechenregeln für Matrizen:

i) Multiplikation mit einer reellen Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\alpha A := (\alpha a_{ik}) \quad \text{komponentenweise Multiplikation}$$

ii) Addition zweier $m \times n$ -Matrizen A, B

$$A + B := (a_{ik} + b_{ik}) = B + A$$

iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Beispiel 1:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^T = \begin{pmatrix} a+\alpha & c+\gamma \\ b+\beta & d+\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = A^T + B^T$$

iv) Produkt von zwei Matrizen

Definition: A $m \times n$ -Matrix B $n \times r$ -Matrix

$$A \cdot B = C = (c_{ik})$$

$i = 1, \dots, m$
 $k = 1, \dots, r$ ist eine $m \times r$ -Matrix

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

$$\begin{pmatrix} \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

d.h.: Matrix C_{ik} ist das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B

$$B1: \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix} \neq A \cdot B$$

d.h. Matrixprodukt ist nicht kommutativ $\bar{U}$

B2: B ist 2×1 -Matrix d.h. Spaltenvektor

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma \\ c\alpha + d\gamma \end{pmatrix}$$

B3: A ist 1×2 -Matrix d.h. Zeilenvektor

$$A \cdot B = (a \ b) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = (a\alpha + b\gamma, a\beta + b\delta)$$

Es gilt:

$$i) (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

ii) Einheitsmatrix $n \times n$ Matrix

$$\underline{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } A \cdot \underline{1}_n = \underline{1}_n \cdot A = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

$$iii) A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{Distributivgesetz}$$

$$iv) A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot B \cdot C \quad \text{Assoziativgesetz}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} a \cdot x + b y &= A \\ c \cdot x + d y &= B \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

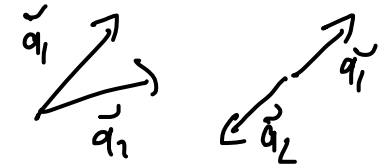
Der Rang einer $m \times n$ -Matrix A ($= \text{rg}(A)$)

bezeichnet die Dimension des von $\vec{a}_i$ aufgespannten Vektorraums

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ mit $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$

$\text{rg}(A) = 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2$ sind linear unabhängig

$$\vec{a}_1 \neq c \vec{a}_2 \quad c \in \mathbb{R}$$



$\text{rg}(A) = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \vec{a}_1 = c \vec{a}_2$

$$\text{z.B. } A = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \beta & 2\beta \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A) = 0 \quad \text{falls } \vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{0} \quad (\Leftrightarrow) \quad A = 0$

Folgende Umformungen ändern $\text{rg}(A)$ nicht:

i) Vertauschung von Zeilen

Bsp.: $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ \alpha & \gamma \end{pmatrix}$

ii) Vertauschung von Spalten

iii) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer Zahl $c \neq 0$

iv) Addition eines Vielfachen einer Zeile (oder Spalte)
zu einer anderen Zeile (oder Spalte)

Quadratische Matrizen

Eine Matrix heißt quadratisch falls $m=n$ also

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ heißen Diagonalelemente

Die Spur einer Matrix A ist definiert durch

$$Sp(A) = Tr(A) = a_{11} + \dots + a_{nn} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Es gilt:

$$Sp(A \cdot B) = Sp(B \cdot A)$$

Beweis:
$$Sp(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n (A \cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ji} =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ji} A_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} A_{ji} = \text{Sp}(B \cdot A)$$

$$\text{Sp}(A_1 \cdots A_n) = \text{Sp}(A_2 A_3 \cdots A_n A_1) = \text{Sp}(A_n A_1 \cdots A_{n-1})$$

↙
zyklische Permutation der Matrizen

Für eine Diagonalmatrix D gilt:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{also } d_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

Die inverse Matrix A^{-1} von A erfüllt

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$$

Wenn A^{-1} existiert, dann A heißt invertierbar

Es gilt: $\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$

Beweis: $(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{= \underline{1}} \cdot A^{-1} = \underbrace{A \cdot \underline{1}}_{= A} \cdot A^{-1} =$
 $= A \cdot A^{-1} = \underline{1}$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Probe: $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$
 $= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{1}$

A^{-1} existiert genau dann wenn $ad - bc \neq 0$

Jede quadratische Matrix A läßt sich aufspalten in einen symmetrischen und einen anti-symmetrischen Teil

$$A = S + T$$

$$S = \frac{1}{2} (A + A^T)$$

$$T = \frac{1}{2} (A - A^T)$$