

Erzwungene Schwingungen in komplexer Schreibweise

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}$$

Ansatz: $z(t) = A e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} =: |A| e^{i\varphi}$$

$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = |A| \cos(\omega t + \varphi) ; \quad F(t) = \operatorname{Re} (f_0 e^{i\omega t}) = f_0 \cos \omega t$$

Für $\Omega < \omega_0 \Rightarrow |\phi| < 1$; $\varphi < 0$

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \varphi = 0$$

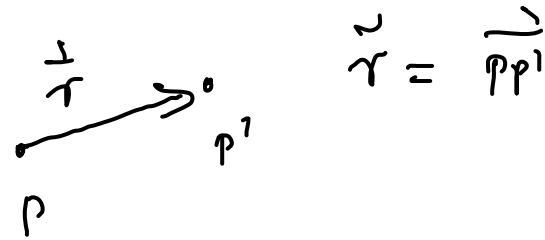
Für $\Omega \rightarrow \omega_0 \stackrel{!}{=} \text{Resonanz}$

$$\phi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$$

$\rightarrow$ Oszillate "hinkt" der äußeren Kraft um $\pi/2$
hinterher

Vorlesung 11: Vektoren

Beispiel: geometrische Vektoren



Konvention: $\vec{r}$; in print: **bold face**

in der Physik: Ortsvektoren von Teilchen

Mathematik: Vektoren = Elemente eines Vektorraumes V

V besteht aus Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots \in V$

"Körper": Wir definieren Addition von Vektoren
und Multiplikation mit Zahlen

V erfüllt die Axiome

$$A1) \quad (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \quad \text{Assoziativgesetz für "+"}$$

$$A2) \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad \text{Kommutativität}$$

$$A3) \quad \exists \text{ Nullelement } \vec{0} \quad \vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$$

$$A4) \quad \vec{u} + \vec{x} = \vec{w} \quad \text{besitzt eindeutige Lösung } \vec{x} = \vec{w} - \vec{u}$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha \vec{u} \in V$ und es gilt

$$S1) \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u} \quad \text{Distributivgesetz für " \cdot "}$$

$$S2) \quad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

$$S3) \quad \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \beta) \cdot \vec{u}$$

$$S4) \quad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} \quad \forall \vec{u} \in V$$

Beispiel 1: $V = \mathbb{R}^3$

Beispiel "Phasenraum" in der Physik $V = \mathbb{R}^6$

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \ddot{\vec{x}}$$

Phasenraum besteht aus Ortsvektoren und Geschwindigkeitsvektoren

Basis $\mathbb{R}^n$ n -Tupel

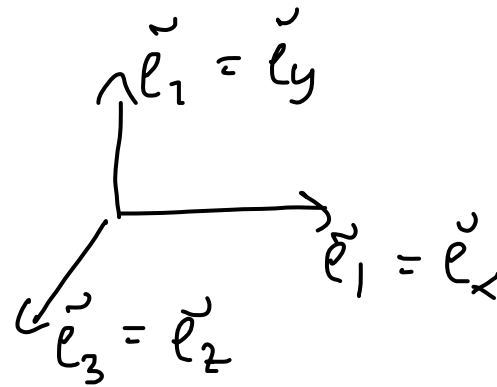
$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + \dots + v_n \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i$$

Wobei $v_i \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt und $\vec{e}_i$ bilden
sogenannte "Basisvektoren"

$$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

$n = \dim V$ ist "Dimension von V "

$$B1: \quad \forall \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$$



Die $\vec{e}_i$ bilden die Basisvektoren eines kartesischen Koordinatensystems/

$$\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3 = (v_1, v_2, v_3)$$

Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ heißen linear unabhängig falls

$$\vec{u} \neq \alpha \vec{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

bildlich: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind weder parallel noch anti-parallel
d.h. sie bilden einen Winkel $\neq 0$ miteinander

Skalarprodukt

Schreibweise: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ oder $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$
 $\alpha \cdot \vec{u}$

Skalarprodukt: bilineare Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

Eigenschaften:

$$a) \quad \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} + \beta \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$b) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$c) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{und} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

Beispiel: $V = \mathbb{R}^n$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

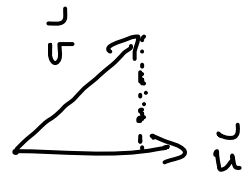
Norm von $\vec{u}$: $|\vec{u}| := \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \geq 0$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

Es gilt (Beweis z.B. Fische/Kanal)

1.) $|\alpha \vec{u}| = |\alpha| |\vec{u}|$

2.) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq |\vec{u}| |\vec{v}|$ Cauchy-Schwarzsche Ungleichung



$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \quad (=\Rightarrow) \quad \vec{v} = \alpha \vec{u}$$

3.) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ Dreiecksungleichung

Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ heißen orthogonal zueinander falls $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Eine Basis $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ heißt orthonormal falls

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

$\nwarrow$
 Kronecker-Delta

In diesen Fall gilt:

$$\vec{e}_j \cdot \vec{v} = \vec{e}_j \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n v_i \vec{e}_i}_{=\vec{v}} = \sum_{i=1}^n v_i \underbrace{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i}_{=\delta_{ij}} = v_j$$

$$\Rightarrow \boxed{v_j = \vec{e}_j \cdot \vec{v}}$$

Man definiert einen Winkel φ zwischen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$

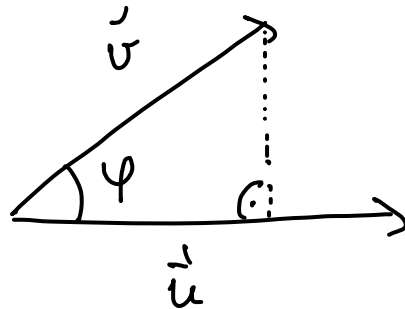
$$\cos \varphi := \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos \varphi \leq 1$$

folgt aus Cauchy-Schwarz

$$\rightarrow \varphi \in [0, \pi]$$

insbesondere: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$



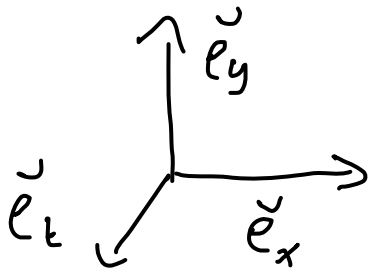
Für $\varphi = 0$ ist $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ $\alpha > 0$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

Für $V = \mathbb{R}^3$ existiert auch das Vektorprodukt, auch genannt "Kreuzprodukt"

definiert durch:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z = \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1$$



$$\vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x = \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_z = -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}$$

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i \quad \vec{v} = \sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^n v_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \vec{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{e}_3$$

$$1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3$$

$$(\vec{u} \times \vec{v})_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

Es gilt:

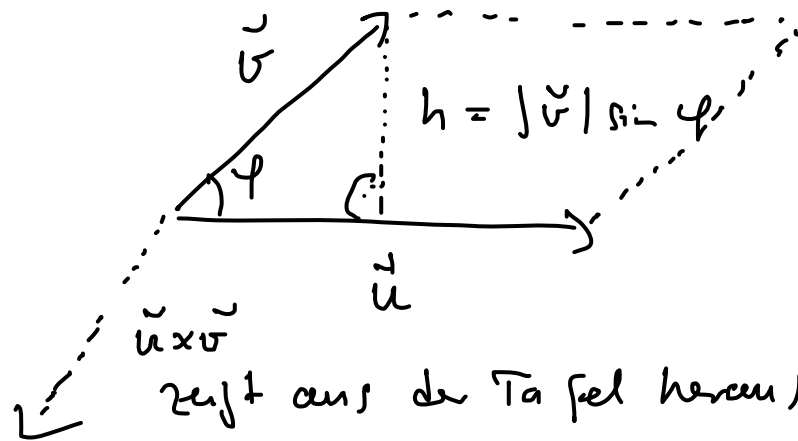
$$i) \quad \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad \text{"antisymmetrisch"}$$

$$ii) \quad (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \times \vec{w} = \alpha \vec{u} \times \vec{w} + \beta \vec{v} \times \vec{w}$$

$$iii) \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w}) \vec{u}$$

$$iv) \quad |\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2 \varphi$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| |\sin \varphi| = \text{Fläche des von } \vec{u} \text{ und } \vec{v} \text{ aufgespannten Parallelogramms}$$



zeigt aus der Tafel heraus, und $|\vec{u} \times \vec{v}| = \text{Fläche des Parallelogramms}$

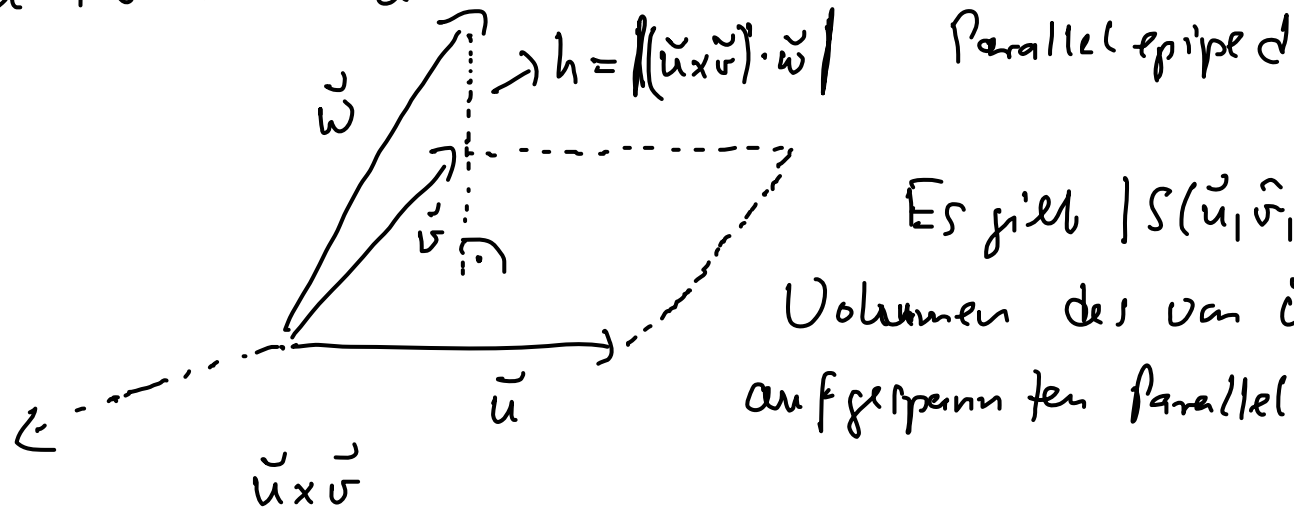
Skalarprodukt

Für drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ definiert man

$$S(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) := (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Es gilt: $S(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = S(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = S(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$

$$\vec{u} \rightarrow \vec{v} \rightarrow \vec{w} \rightarrow \vec{u}$$



Es gilt $|S(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| =$
Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
aufgespannten Parallelpipeds

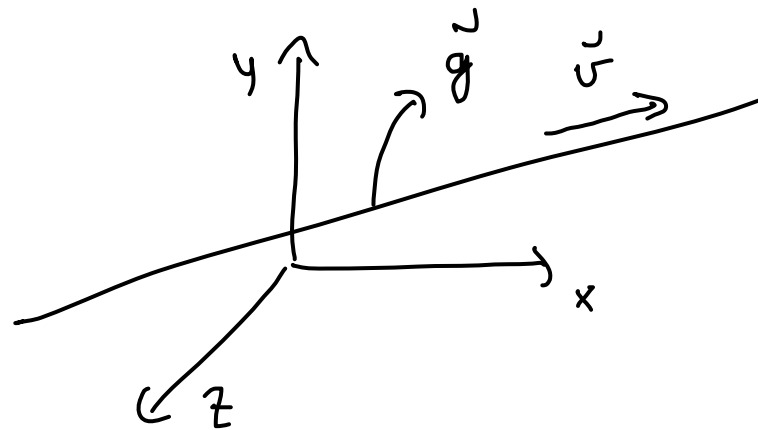
Anwendung von Vektoren:

Parametrisierung von Geraden in $\mathcal{V}$

$$\vec{g} = \vec{u} + \alpha \vec{v}$$

$\vec{v}$ = Richtungsvektor der Geraden

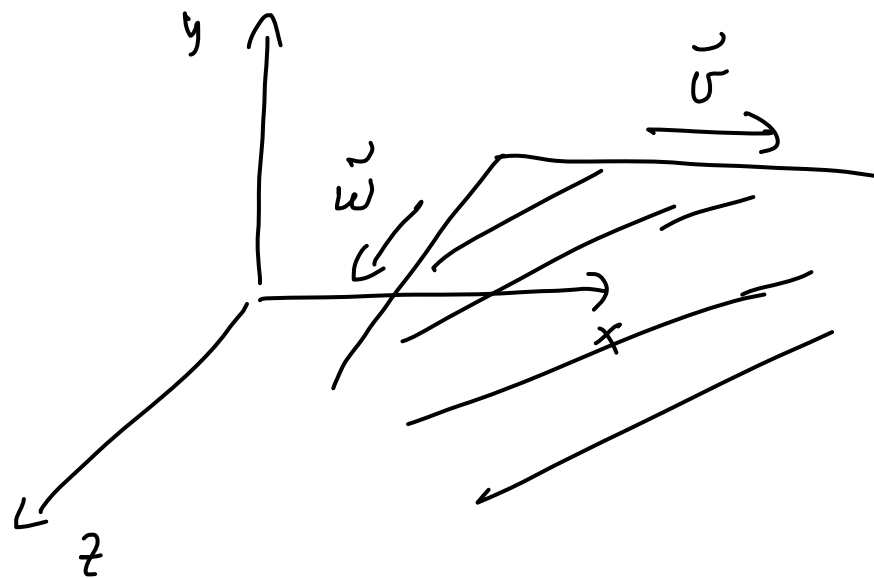
$$\alpha \in \mathbb{R}$$



Parameterdarstellung einer Ebene $\mathbb{E}$ in $\mathcal{V}$

$$\vec{r} = \vec{u} + \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$



$$V = \mathbb{R}^3$$