Differentialgleichungen: Lösung durch Potenzreihenansatz

Beispiel: $\quad (1+x)f'' + 2f = x^2$

Ansatz: $\quad f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, a_j x^{j-1} \qquad f''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1)\, a_j x^{j-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\, a_j x^{j-2} + \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1)\, a_j x^{j-1} + 2\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vergleich der Koeffizienten von einer Potenz von x:

x^0 : $\quad 2a_2 + 2a_0 = 0 \quad \rightarrow \quad a_2 = -a_0$

x^1 : $\quad 6a_3 + 2a_2 + 2a_1 = 0 \quad \rightarrow \quad a_3 = -\frac{1}{3}(a_2 + a_1) = \frac{1}{3}(a_0 - a_1)$

x^2: $\quad 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 1 \quad \Rightarrow a_4 = -\frac{1}{6}(a_2 + 3a_3)$

$$= \ldots (a_0, a_1)$$

x^n: $\quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)n\, a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad n > 2$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{-2a_n - n(n+1)a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}$$

→ Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n

→ Alle a_n für $n > 1$ lassen sich ausdrücken

durch a_0 und a_1

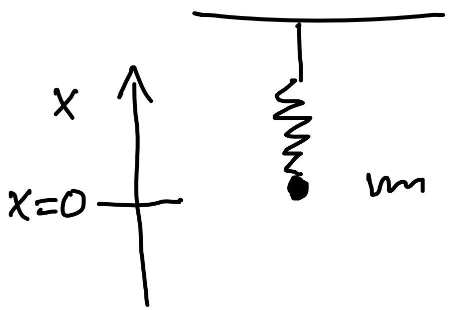
Lineare Schwingungen

Zeit t ist meine unabhängige Variable

$$x(t)$$

Newtonsche Gleichung

$$F(t,x) = ma = m\ddot{x}$$



Feder: im Gleichgewicht ist $x=0$

$$F(t,x) = F(x) = \underbrace{F(x=0)}_{=0 \to \text{Gleichgewicht}} + F'(0)\cdot x + \dots$$

$$F(x) = -k\,x$$

Hooke'sches Gesetz $\qquad k =$ Federkonstante

$$\Rightarrow \boxed{m\ddot{x} = -k\,x}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Schwingungsfrequenz

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x - 2\gamma \dot{x} + f(t)}$$

Reibungskraft

äußere Kraft

$$f(t) = \frac{F(t)}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Gedämpfter harmonischer Oszillator $\qquad \gamma \geq 0$

Freie Schwingungen

keine äußere Kraft $f(t) = 0$

$\rightarrow$ homogene DGL: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

ungedämpfte Schwingungen: $\gamma = 0$

reelle Lösungen:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad A, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\ddot{x}(t) = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \alpha)$$

$$x(t) = \underbrace{A\cos\alpha}_{a}\cos\omega_0 t \underbrace{- A\sin\alpha}_{b}\sin\omega_0 t =$$

$$= a\cos\omega_0 t + b\sin\omega_0 t$$

Komplexe Lösungen

$$x(t) = a_+ e^{i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t}$$

$$\dot{x}(t) = i\omega_0 a_+ e^{i\omega_0 t} - i\omega_0 a_- e^{-i\omega_0 t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 a_+ e^{i\omega_0 t} - \omega_0^2 a_- e^{-i\omega_0 t} = -\omega_0^2 x(t)$$

Zur Erinnerung:

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \sin\omega_0 t$$

Die Lösungen sind periodisch:

$$x\left(t + \frac{2\pi n}{\omega_0}\right) = x(t) \quad \rightarrow \quad \text{Periode} = \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0$$

ω_0 = Kreisfrequenz ; Frequenz $\nu = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

gedämpfte Schwingungen $\quad \gamma > 0$

Ansatz: $\quad x(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}; \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) e^{\lambda t} = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \qquad \rightarrow \text{charakteristische Polynom}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

a) Schwingfall: $\quad \omega_0 > \gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = -\gamma \pm i\omega$

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}\right) \qquad c_+, c_- \in \mathbb{C}$$

Schreibe: $\quad c_+ = \frac{A}{2} e^{i\alpha} \quad ; \quad c_- = \frac{A}{2} e^{-i\alpha} \qquad A, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \frac{A}{2} e^{-\gamma t}\left(e^{i(\omega t+\alpha)} + e^{-i(\omega t+\alpha)}\right)$$

$$= A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$$

Ausdrücken der freien Konstanten durch Anfangsbedingungen

$$x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$$

$$\dot{x}(t) = \lambda_1 \dot{x}_1(t) + \lambda_2 \dot{x}_2(t)$$

Anfangsbedingung: $x(t=0) = x_0$

$\dot{x}(t=0) = v(t=0) = v_0$

x_0, v_0 sind vorgegeben

$$\rightarrow \quad x_0 = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0)$$

$$v_0 = \lambda_1 \dot{x}_1(0) + \lambda_2 \dot{x}_2(0)$$

$$\lambda_1 = \frac{x_0 \dot{x}_2(0) - v_0 x_2(0)}{\underbrace{x_1(0)\dot{x}_2(0) - \dot{x}_1(0) x_2(0)}}$$

$= W(t=0) \neq 0$ für $x_1(t), x_2(t)$ linear unabhängig

$\lambda_2 =$ analog $1 \leftrightarrow 2$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$$

Spezialfall : $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$

$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t}$

$$\dot{x}(t) = \frac{v_0}{\omega}\left(-\gamma e^{-\gamma t} \sin \omega t + \omega e^{-\gamma t} \cos \omega t\right)$$

$$\dot{x}(t=0) = v_0$$

b) aperiodische Grenzfall $\qquad \omega_0 = \gamma$

$$\lambda = \lambda_+ = \lambda_- = -\gamma$$

$$e^{-\gamma t} \quad ; \quad t e^{-\gamma t}$$

$$x_2(t) := t e^{-\gamma t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_2(t) = e^{-\gamma t} - \gamma t e^{-\gamma t} = (1-\gamma t) e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x}_2(t) = \left[-\gamma(1-\gamma t) - \gamma\right] e^{-\gamma t} = (\gamma^2 t - 2\gamma) e^{-\gamma t}$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_2 + 2\gamma \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = \left[\gamma^2 t \cancel{-2\gamma} \cancel{+2\gamma} - 2\gamma^2 t + \omega_0^2 t\right] e^{-\gamma t}$$

$$= \left[\omega_0^2 - \gamma^2\right] t e^{-\gamma t} = 0$$

c) Kriechfall : $\qquad \omega_0 < \gamma$

definiere $\tilde{\omega} := \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad \rightarrow \quad \lambda = -\gamma \pm \tilde{\omega}$

$\Rightarrow \quad x(t) = e^{-\gamma t}\left(a_+ e^{\tilde{\omega} t} + a_- e^{-\tilde{\omega} t}\right)$ ist die allgemeine Lösung

Beispiel: $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = v_0$

$$x(t) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}} e^{-\gamma t} \sinh \tilde{\omega} t$$

Erzwungene Schwingungen

Es wirke nun eine periodische äußere Kraft

$f(t) = f_0 \cos \Omega t$

DGL: $\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t$

betrachte die komplexe Gleichung

$$\boxed{\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t}}$$

→ Bildung des Realteils führt auf ursprüngliche Gleichung zurück

Ansatz: $z(t) = A e^{i\Omega t}$

$\dot{z}(t) = i\Omega A e^{i\Omega t}$; $\ddot{z} = -\Omega^2 A e^{i\Omega t}$

$$\left[-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2\right] A \cancel{e^{i\Omega t}} = f_0 \cancel{e^{i\Omega t}}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$$

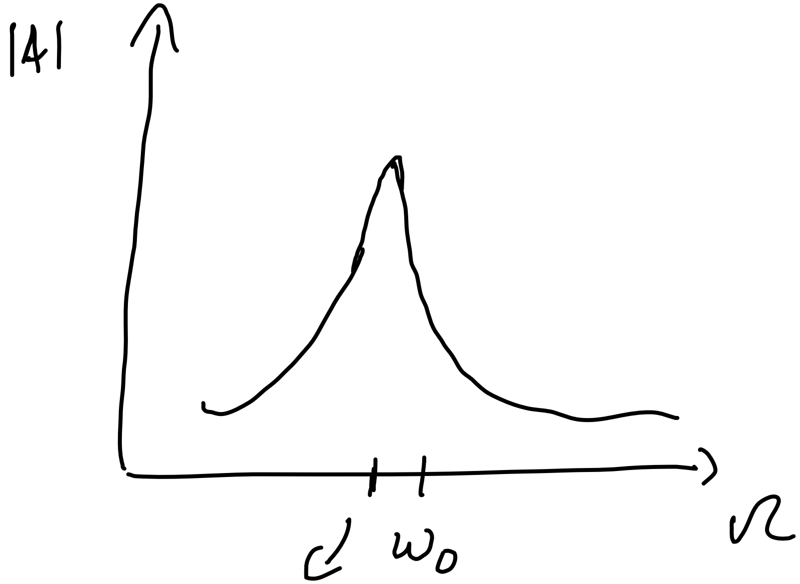
In Polardarstellung ist $A = |A|\, e^{i\varphi}$

$$\Rightarrow \quad |A|^2 = A A^* = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega)} =$$

$$= \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2} \quad \Rightarrow \quad |A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(2i\gamma\Omega)^2 = -4\gamma^2\Omega^2$



Resonanzfrequenz

$$A = |A| e^{i\varphi} \Rightarrow A^{-1} = \frac{e^{-i\varphi}}{|A|} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}{f_0}$$

$$\Rightarrow -\varphi = \arctan \frac{\operatorname{Im} A^{-1}}{\operatorname{Re} A^{-1}} \Rightarrow \varphi = -\arctan \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$\rightarrow$ reelle Lösung $= x(t) = \operatorname{Re} z(t) = |A| \cos(\Omega t + \varphi)$