

3.3. Poissongleichung in der Elektrostatik

gegeben sei Punktladung q bei $\vec{r}=0$; $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r})$

also $\int \rho d^3\vec{r} = q$. Poissongleichung für elektrostatisches Potential:

$$\Delta \phi = - \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r})$$

Allbekannte Lösung ist $\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$, also

$$\Delta \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = - \frac{q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) \quad (\Leftrightarrow) \quad \Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$$

Potential ist radialsymmetrisch, also ist Poissongleichung am besten in Kugelkoordinaten zu schreiben (siehe Übungsaufgabe)

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $=0$ $=0$

$$\Rightarrow \Delta \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-\frac{1}{r^2} \right) \right) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

Bei $r=0$ ist $\frac{1}{r}$ singulär. Wir beweisen daher $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\vec{r})$ im Sinne der Distributionstheorie: $g \in \mathcal{G}$

$$\text{beweise} \quad \int_{\mathbb{R}^3} g(\vec{r}) \left[-\Delta \frac{1}{4\pi r} \right] d^3\vec{r} = g(\vec{r}=0)$$

$$-\Delta \frac{1}{4\pi r} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \right) =: \vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{r})$$

$\downarrow$
 $\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

$$\Rightarrow - \iiint_{r \leq R} g(\vec{r}) \Delta \left(\frac{1}{4\pi r} \right) d^3\vec{r} = \iiint_{r \leq R} g(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{G}(\vec{r}) d^3\vec{r} =$$

$r \leq R$ $r \leq R$

(Kugel mit Radius R)

$$= \iiint_{r \leq R} [\vec{v} \cdot (g(\vec{r}) \vec{G}(\vec{r})) - \vec{G}(\vec{r}) \cdot \vec{v} g(\vec{r})] d^3 \vec{r} =$$

$$\vec{v} \cdot (g \vec{G}) = g \vec{v} \cdot \vec{G} + \vec{G} \cdot \vec{v} g$$

$$= \oint_{r=R} [g(\vec{r}) \vec{G}(\vec{r})] \cdot d\vec{F} - \iiint_{r \leq R} \frac{1}{4\pi r^3} (\vec{r} \cdot \vec{v}) g(\vec{r}) d^3 \vec{r} =$$

↓
Satz von Gauß (Kugeloberfläche)

$$= \iint d\Omega \frac{g(\vec{r})}{4\pi} - \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega \int_0^R dr \frac{\partial g(\vec{r})}{\partial r}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r \frac{\partial}{\partial r}$$

(siehe Übungsaufgabe)

$$d^3 \vec{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$$

$$= r^2 d\Omega dr$$

in Kugelkoordinaten

$$d\vec{F} = r^2 d\Omega \vec{e}_r$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 - \frac{1}{4\pi} \iint d\Omega [g(R\vec{e}_r) - g(\vec{0})] = g(\vec{0})$$

↓

Testfunktion $g(\vec{r})$ fällt
schnell ab

$$\Rightarrow -\Delta \frac{1}{4\pi r} = \delta(\vec{r})$$

Verallgemeinerung:

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

↙
wird auf $\vec{r}$, $\vec{r}'$ ist fix

⇒ Lösung der Poissongleichung für beliebige ~~Potential~~ Ladungsverteilung $\rho_e(\vec{r}')$ durch Superposition:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 \vec{r}' + \tilde{\phi}(\vec{r})$$

wobei $\tilde{\phi}(\vec{r})$ beliebige Lösung der "homogenen Poissongleichung" $\Delta \tilde{\phi}(\vec{r}) = 0$

Proberechnung:

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho_e(\vec{r}') \Delta_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' =$$

$$= - \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_e(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') d^3\vec{r}' = - \frac{\rho_e(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Beispiel: Radial symmetrische Ladungsverteilung $\rho_e(\vec{r}) = \rho_e(r)$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_e(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3\vec{r}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty dr' r'^2 \rho_e(r') \int d\Omega \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\int d\Omega \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}} =$$

$$\downarrow$$

$$\cos\theta = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_{r'}$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 d\cos\theta \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta}} = \frac{4\pi}{2rr'} \left[\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta} \right]_{-1}^{+1}$$

$$\downarrow$$

$$\cos\theta = -1$$

$$d\cos\theta = -\sin\theta d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{rr'} (r+r' - |r-r'|) = 2\pi \begin{cases} \frac{2}{r} & \text{für } r \geq r' \\ \frac{2}{r'} & \text{für } r < r' \end{cases} = \frac{4\pi}{r_{\geq}}$$

mit $r_{\geq} = \max(r, r')$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\infty \rho_e(r') \frac{r'^2}{r_{\geq}} dr' = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \int_0^r \rho_e(r') r'^2 dr' + \int_r^\infty \rho_e(r') r' dr' \right)$$

=> Potential von Ladungen innerhalb r fällt wie $\frac{1}{r}$ ab

wobei man sich die Gesamtladung innerhalb r ,

$Q_e(r) = 4\pi \int_0^r \rho_e(r') r'^2 dr'$, als bei $r=0$ lokalisiert denken kann. Das Potential von Ladungen außerhalb von r ist konstant.

Multipolentwicklung:

Für $r' \ll r$ gilt $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$: (siehe 1. Semester)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \vec{r}'^T \tilde{Q}_e \vec{r}'$$

mit der Matrix $(\tilde{Q}_e)_{ij} = 3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \sum_{ij} (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) r'_i r'_j \right) \rho_e(\vec{r}') d^3r'$$

1. Term: $\frac{1}{r} \int \rho_e(\vec{r}') d^3r' = \frac{q_e}{r} \rightarrow \text{Monopol}$

2. Term: $\frac{1}{r^3} \int \vec{r} \cdot \vec{r}' \rho_e(\vec{r}') d^3r' = \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}}{r^3} = \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{p}}{r^2}$

mit $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho_e(\vec{r}') d^3r' \rightarrow \text{Dipolmoment}$

3. Term: $\frac{1}{2r^5} \int \sum_{ij} (3r_i r_j - r^2 \delta_{ij}) r'_i r'_j \rho_e(\vec{r}') d^3r' =$

$$= \frac{1}{2r^5} \int \sum_{ij} r_i r_j (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho_e(\vec{r}') d^3r'$$

$$\sum_{ij} r^2 \delta_{ij} r'_i r'_j = r^2 r'^2 = \sum_{ij} r'^2 \delta_{ij} r_i r_j$$

$$= \frac{1}{2r^5} \vec{r}^T \tilde{Q}_e \vec{r}$$

mit $(\tilde{Q}_e)_{ij} = \int (3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho_e(\vec{r}') d^3r'$

$\rightarrow$ Quadrupoltensor $(\tilde{Q}_e)_{ij} = (\tilde{Q}_e)_{ji}$ (symmetrisch)

$$\sum_i (\tilde{Q}_e)_{ii} = 0 \text{ (spurlos)}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_e}{r} + \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{1}{2r^3} \vec{e}_r^T \tilde{Q}_e \vec{e}_r \right]$$

dominiert von erstem nicht-verschwindenden Multipol