3.2. Einschub: Die Delta-Funktion

... hat die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0) \qquad \forall \text{ hinreichend "glatten" Funktionen } f(x)$$

und ist eine "Distribution"

3.2.1. Elementare Definition

Definiere

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > \frac{1}{n} \\ \frac{n}{2} & \text{für } |x| \leq \frac{1}{n} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)dx = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \; ; \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0 & ; x \neq 0 \\ \infty & ; x = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g_n(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} f(x)dx \underset{\text{Mittelwertsatz}}{=} \frac{n}{2} f(x_n) \int_{-1/n}^{1/n} dx = f(x_n)$$

mit $-\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{1}{n}$

also $$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g_n(x) dx = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) \quad \text{falls } f \text{ stetig}$$

Man schreibt $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g_n(x) dx = f(0)$$

Oder abkürzend $$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$$

Andere Darstellungen:

$$\delta(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x}$$

Diese Funktionen sind auf 1 normiert, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx = 1$

z.B. $\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-nx^2}\,dx \underset{x'=\sqrt{n}x}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x'^2}\,dx' = 1$

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) f(x)\,dx - f(0) \right| \underset{\text{Normierung}}{=} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\big(f(x) - f(0)\big)\,dx \right|$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n(x) \left| f(x) - f(0) \right| dx \leq \max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,|x-0|\,dx$$

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$= \max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \; 2 \int\limits_0^{\infty} g_n(x)\, x\,dx = \max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|\, 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \underbrace{\int\limits_0^{\infty} x e^{-nx^2}\,dx}_{=\frac{1}{2n} \int\limits_0^{\infty} e^{-x'}\,dx'}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \max_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)| \to 0$$ für $n \to \infty$ und sich hinreichend "wohl verhaltenden" $f(x)$

3.2.2. Eigenschaften der Delta-Funktion

(1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$

für $f(x)=1$ insbesondere $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,dx = 1$

(2) $$\int\limits_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{für } a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0) & \text{für } a = x_0 \text{ oder } b = x_0 \\ 0 & \text{für } x_0 < a < b \text{ oder } a < b < x_0 \end{cases}$$

(3) $\delta(-x) = \delta(x)$

(4) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)$ für $a \neq 0$

(5) $\delta(h(x)) = \frac{1}{|h'(x_0)|}\,\delta(x-x_0)$ mit $h(x_0)=0$, $h'(x_0)\neq 0$
x_0 einzige Nullstelle von $h(x)$

(5') $\delta(h(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{|h'(x_i)|}\,\delta(x-x_i)$ wenn x_i alle Nullstellen von $h(x)$ sind

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x-x_0) = -f'(x_0)$

(7) $H'(x) = \delta(x)$

Stufenfunktion oder Heaviside'sche Sprungfunktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x<0 \\ 1/2 & \text{für } x=0 \\ 1 & \text{für } x>0 \end{cases}$$

Beweise:

(2) Definiere $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ und wende (1) an

Für $a = x_0$ oder $b = x_0$ verdopple Integral und verwende (1)
$\Rightarrow$ Integral über Teilintervall $= \frac{1}{2} f(x_0)$

(5) x_0 sei einzige Lösung von $h(x)=0$ $\Rightarrow$ $\exists$ $a < x_0 < b$ so daß $y = h(x)$ bijektiv ist für $a<x<b$ $\Rightarrow$ $\exists$ Umkehrfunktion $x(y)$ mit $x_0 = x(0)$. Angenommen $h'(x_0) > 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(h(x))\,dx \underset{(2)}{=} \int_a^b f(x)\,\delta(h(x))\,dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x(y))\,\delta(y)\,\frac{dy}{h'(x(y))} =$$

$dy = h'(x(y))\,dx$

$y = h(x)$

$$= \frac{f(x(0))}{h'(x(0))} = \frac{f(x_0)}{h'(x_0)} \Rightarrow \delta(h(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|h'(x_0)|}$$

falls $h'(x_0) < 0$ sind Vorzeichen und Integrationsgrenzen vertauscht

(5') falls $h(x)$ mehrere Nullstellen hat, kann man disjunkte Intervalle definieren:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(h(x))\,dx = \sum_i \int_{a_i}^{b_i} \delta(h(x))\,dx \underset{(5)}{=} \sum_i \frac{1}{|h'(x_i)|} f(x_i)$$

(4) Folgt aus (5) mit $h(x) = ax$

(3) folgt aus (4) mit $a = -1$

(6) $\delta(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ $\quad\quad \delta'(x) = \lim_{n\to\infty} g_n'(x)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta'(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g_n'(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[g_n(x) f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,g_n(x)\,dx \right] =$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\,\delta(x)\,dx = -f'(0)$$

(7) Für $a < 0 < b$ gilt:

$$\int_a^b H'(x) f(x)\,dx = H(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b H(x) f'(x)\,dx =$$

$$= H(b)f(b) - H(a)f(a) - \int_0^b f'(x)\,dx = f(b) - f(x)\Big|_0^b = f(0)$$

3.2.3. Dreidimensionale Delta-Funktion

Für $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ ist

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \delta(x_1 - x_{10})\,\delta(x_2 - x_{20})\,\delta(x_3 - x_{30})$$

mit

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, f(\vec{r})\, dV = f(\vec{r}_0) \qquad dV = dx_1\, dx_2\, dx_3$$

in krummlinigen Koordinaten y_1, y_2, y_3 mit $b_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i}\right|$ gilt

$$f(\vec{r}_0) = \int f(\vec{r})\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, dV =$$

$$= \iiint f(\vec{r}(y_1, y_2, y_3))\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)\, b_1 b_2 b_3\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

$$= \iiint f(\vec{r}(y_1, y_2, y_3))\,\delta(y_1 - y_{10})\,\delta(y_2 - y_{20})\,\delta(y_3 - y_{30})\, dy_1\, dy_2\, dy_3$$

$$\Rightarrow \quad \delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{\delta(y_1 - y_{10})\,\delta(y_2 - y_{20})\,\delta(y_3 - y_{30})}{b_1\, b_2\, b_3}$$

Beispiel: In sphärischen Koordinaten ist

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{\delta(r - r_0)\,\delta(\vartheta - \vartheta_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0)}{r_0^2 \sin\vartheta_0}$$

und in Zylinderkoordinaten

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{\delta(\rho - \rho_0)\,\delta(\varphi - \varphi_0)\,\delta(z - z_0)}{\rho_0}$$

Anwendungen:

1.) n Punktladungen ~~Q_i~~ q_i bei $\vec{r}_i$: $\quad \rho_e(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} q_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i)$

2.) homogen geladene Kugeloberfläche mit Radius R und Ladung Q:

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2}\,\delta(r - R)$$

3.) homogene Ladungsverteilung im Innern einer Kugel

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{3Q}{4\pi R^3} H(R-r)$$

4.) homogen geladener Zylinder

$$\rho_e(\vec{r}) = \frac{Q}{2d\pi R^2} H(R-\rho)\left(H(z+d) - H(z-d)\right)$$

5.) $\rho_e(\vec{r}) = -p\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)$

$$\Rightarrow Q = \int \rho_e(\vec{r})\, d^3\vec{r} = -p \iiint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\delta(y)\,\delta'(z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= -p \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\,dy}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(z)\,dz}_{=0} = 0$$

Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{r}\,\rho_e(\vec{r})\,d^3\vec{r}$

$$\Rightarrow p_x = -p \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\delta(x)\,dx}_{=0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\,dy}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(z)\,dz}_{=0} = 0$$

also auch $p_y = 0$

$$p_z = -p \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y)\,dy \int_{-\infty}^{+\infty} z\,\delta'(z)\,dz = -p\int_{-\infty}^{+\infty} z\,\delta'(z)\,dz$$

$$= p$$

$$\Rightarrow \vec{p} = (0,0,p) = p\,\vec{e}_z$$

entspricht Punktladungen $\pm q$ bei $z = \pm d$, $x = y = 0$

$$\Rightarrow \rho_e(\vec{r}) = q\,\delta(x)\delta(y)\left(\delta(z-d) - \delta(z+d)\right) = -2qd\,\delta(x)\delta(y)\,\frac{\delta(z+d) - \delta(z-d)}{2d}$$

$$\rightarrow -p\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z) \quad \text{mit } p = 2qd = \text{const.}$$

(siehe Grenzprozess in früherer Übungsaufgabe)

3.2.4. Distributionen

Raum $\mathcal{G}$ der Testfunktionen: Alle beliebig oft differenzierbaren Funktionen $g(x)$, $-\infty < x < \infty$ die "schnell abfallen", d.h.

$$\lim_{|x| \to \infty} x^m g^{(k)}(x) = 0 \qquad \forall\ m, k \in \mathbb{N}$$

Beispiel: $g(x) = e^{-\lambda x^2}$

$g_n(x)$ bildet "Nullfolge" wenn alle $|x|^m g_n^{(k)}(x)$ in $-\infty < x < \infty$ gleichmäßig gegen Null konvergiert

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = g_0(x)$$

wenn $g_n(x) - g_0(x)$ Nullfolge bildet

$\mathcal{G}$ ist linearer Raum

Eine Abbildung $T: g \in \mathcal{G} \to \mathbb{C}$; $z = T(g)$ heißt "Funktional" von g

Eine "temperierte Distribution" ist ein lineares, stetiges Funktional auf $\mathcal{G}$:

$$T(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T(g_1) + \alpha_2 T(g_2) \qquad \begin{array}{l} \forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} \\ \forall\ g_1, g_2 \in \mathcal{G} \end{array}$$

$$\lim_{n \to \infty} T(g_n) = T\left(\lim_{n \to \infty} g_n\right) = T(g_0)$$

für $\lim_{n \to \infty} g_n = g_0$

Die k-te Ableitung $T^{(k)}$ einer Distribution T ist definiert durch

$$T^{(k)}(g) = (-1)^k\, T(g^{(k)})$$

und ist ebenfalls eine Distribution

Sei $\quad S_{x_0}(g) := \int_{x_0}^{\infty} (x-x_0)\, g(x)\, dx \qquad \forall g \in \mathcal{G}$

$$\Rightarrow \quad S'_{x_0}(g) = -S_{x_0}(g') = -\int_{x_0}^{+\infty} (x-x_0)\, g'(x)\, dx$$

$$\underset{\text{partielle Integration}}{=} -\underbrace{\left[(x-x_0)\, g(x)\right]_{x_0}^{+\infty}}_{=0} + \int_{x_0}^{+\infty} g(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underset{\text{Heaviside'sche Sprungfunktion}}{H(x-x_0)}\, g(x)\, dx =: H_{x_0}(g)$$

$$H'_{x_0}(g) = -H_{x_0}(g') = -\int_{x_0}^{+\infty} g'(x)\, dx =$$

$$= -\left[g(x)\right]_{x_0}^{+\infty} = g(x_0) = \delta_{x_0}(g) \quad \left[= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\, g(x)\, dx \right]$$

$$\Rightarrow \quad \delta_{x_0} = H'_{x_0}$$