2.3. Satz von Gauß

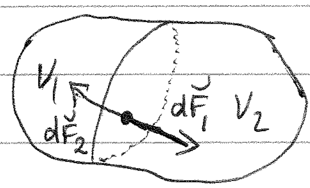
Sei $V = \bigcup_{i=1}^{N} V_i = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_N$ mit $V_i \cap V_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$

Zerlegung in disjunkte Teilmengen

Dann gilt:

$$\oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \oint\!\!\oint_{\partial V_i} \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

da sich Beiträge von gemeinsamen Grenzflächen herausheben, da Normalenvektoren ~~entgegengesetztes~~ entgegengesetztes Vorzeichen haben



Verwende $N \to \infty$ mit $\Delta V_i \to 0$

$$\Rightarrow \oint\!\!\oint_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i \underbrace{\frac{1}{\Delta V_i} \oint\!\!\oint_{\partial(V_i)} \vec{A} \cdot d\vec{r}}_{= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}} = \iiint dV \, \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

2.4. Satz von Stokes

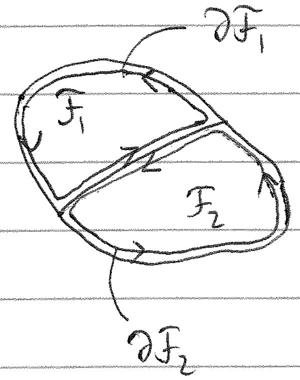
Sei Fläche $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \dots \cup \mathcal{F}_N$ mit $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$

Zerlegung in disjunkte Teilmengen

Dann gilt

$$\oint_{\partial \mathcal{F}} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{N} \oint_{\partial \mathcal{F}_i} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

da sich Beiträge von gemeinsamen Grenzlinien herausheben aufgrund des entgegengesetzten Umlauf-Sinns



Verwende $N \to \infty$, $\Delta F_i \to 0$

$$\Rightarrow \oint_{\partial F} \breve{A} \cdot d\breve{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta F_i \underbrace{\frac{1}{\Delta F_i} \oint_{\partial F_i} \breve{A} \cdot d\breve{r}}_{= \breve{n} \cdot (\breve{\nabla} \times \breve{A})} = \iint_F (\breve{\nabla} \times \breve{A}) \cdot d\breve{F}$$

1.5. Krummlinige Koordinaten

Wiederholung: $\check{r} = \check{r}(y_1, y_2, y_3)$

$\underbrace{y_1, y_2, y_3}_{\text{krummlinige Koordinaten}}$

Einheitsvektoren $\check{u}_i := \frac{1}{b_i} \frac{\partial \check{r}}{\partial y_i}$ $\qquad b_i := \left| \frac{\partial \check{r}}{\partial y_i} \right|$

Gradient einer Skalarfunktion:

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j \quad ; \quad \check{\nabla} f = \sum_j (\check{\nabla} f)_j \, \check{u}_j$$

$$d\check{r} = \sum_k \frac{\partial \check{r}}{\partial y_k} dy_k = \sum_j b_k \check{u}_k dy_k$$

$$df = \check{\nabla} f \cdot d\check{r} = \sum_{j,k} (\check{\nabla} f)_j \, b_k \, dy_k \, \underbrace{\check{u}_k \cdot \check{u}_j}_{= \delta_{kj}}$$

$$= \sum_j b_j (\check{\nabla} f)_j \, dy_j$$

Vergleiche mit erstem Ausdruck für df

$$\Rightarrow \quad (\check{\nabla} f)_j = \frac{1}{b_j} \frac{\partial f}{\partial y_j}$$

oder allgemein $\check{\nabla} = \sum_j \check{u}_j \frac{1}{b_j} \frac{\partial}{\partial y_i}$

wirkt nur auf Funktionen die rechts davon stehen

Hilfsformeln:

$$\frac{\partial \check{r}}{\partial y_i} = b_i \check{u}_i$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial (b_i \check{u}_i)}{\partial y_j} = \frac{\partial^2 \check{r}}{\partial y_j \partial y_i} = \frac{\partial^2 \check{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial (b_j \check{u}_j)}{\partial y_i}$$

Kettenregel $\Rightarrow$ $$\boxed{b_i \frac{\partial \breve{u}_i}{\partial y_j} + \frac{\partial b_i}{\partial y_j} \breve{u}_i = b_j \frac{\partial \breve{u}_j}{\partial y_i} + \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \breve{u}_j} \quad (*)$$

Skalarmultiplikation mit $\breve{u}_j$

$$\Rightarrow \; b_i \left(\frac{\partial \breve{u}_i}{\partial y_j} \cdot \breve{u}_j \right) + \frac{\partial b_i}{\partial y_j} \underbrace{\breve{u}_i \cdot \breve{u}_j}_{=\delta_{ij}} = b_j \underbrace{\left(\frac{\partial \breve{u}_j}{\partial y_i} \cdot \breve{u}_j \right)}_{= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} (\breve{u}_j^{\,2}) = 0} + \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \underbrace{\breve{u}_j \cdot \breve{u}_j}_{=1}$$

$$(**) \quad \Rightarrow \; b_i \left(\frac{\partial \breve{u}_i}{\partial y_j} \cdot \breve{u}_j \right) = \frac{\partial b_j}{\partial y_i} - \delta_{ij} \frac{\partial b_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ \frac{\partial b_j}{\partial y_i} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Divergenz:

$$\Rightarrow \; \breve{\nabla} \cdot \breve{A} = \sum_{i,j} \left(\breve{u}_j \frac{1}{b_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \cdot A_i \breve{u}_i$$

$$= \sum_{i,j} \left[\frac{1}{b_j} \frac{\partial A_i}{\partial y_j} \underbrace{(\breve{u}_j \cdot \breve{u}_i)}_{=\delta_{ij}} + \frac{1}{b_j} A_i \left(\breve{u}_j \cdot \frac{\partial \breve{u}_i}{\partial y_j} \right) \right] =$$

$$= \sum_i \frac{1}{b_i} \frac{\partial A_i}{\partial y_i} + \sum_{i \neq j} \frac{A_i}{b_j b_i} \frac{\partial b_j}{\partial y_i} = \sum_i \frac{1}{b_i} \left[\frac{\partial A_i}{\partial y_i} + \sum_{j \neq i} \frac{A_i}{b_j} \frac{\partial b_j}{\partial y_i} \right] =$$

$$= \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{A_i b_1 b_2 b_3}{b_i} \right)$$

da z.B. für $i = 1$ $$\frac{1}{b_1 b_2 b_3} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{A_1 b_1 b_2 b_3}{b_1} \right) = \cancel{\frac{1}{b_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_1}}$$

$$= \frac{1}{b_1} \frac{\partial A_1}{\partial y_1} + \frac{A_1}{b_1 b_2} \frac{\partial b_2}{\partial y_1} + \frac{A_1}{b_1 b_3} \frac{\partial b_3}{\partial y_1}$$