

1.5. Funktionaldeterminanten

gegeben sei eine 2-dimensionale Koordinatentransformation

$$U = U(u, v)$$

$$V = V(u, v)$$

Definiere die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v}$$

Sei (x, y) ein weiteres Koordinatensystem. Dann gilt nach der Kettenregel in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial u} & \frac{\partial V}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial v} & \frac{\partial V}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{z.B. } \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Da $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ für zwei Matrizen A, B gilt (Übung), folgt:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

Spezialfall $U=u, V=v$

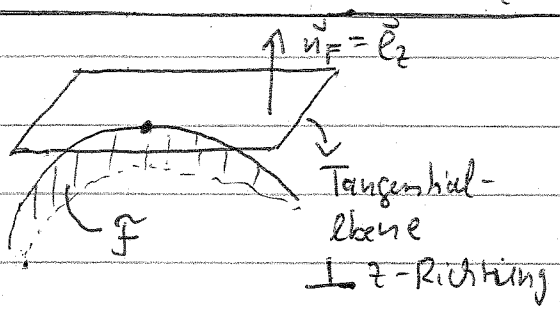
$$\Rightarrow 1 = \frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(U, V)} \Rightarrow \frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(U, V)} \right)^{-1}$$

Seien (x, y, z) kartesische Koordinaten und eine gebümmte Fläche

durch $x=x(u, v), y=y(u, v), z=z(u, v)$ beschrieben, so daß

bei $u=u_0, v=v_0$ $\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) = \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) = 0$, also $\vec{\eta}_F = \vec{e}_z$
(kann durch Drehung immer so gewählt werden)

Dann ist $dF = d\vec{F} \cdot \vec{e}_z = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot \vec{e}_z \, du \, dv = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \, du \, dv$



Spatprodukt

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Flächenelement } |dF| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du \, dv = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dU \, dV$$

$$\Rightarrow dU \, dV = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| du \, dv$$

für beliebige krummlinige Koordinaten $(u,v), (U,V)$

Dies gilt auch in > 2 Dimensionen

2. Integralsätze von Gauß und Stokes

2.1. Divergenz als Quellenfeld

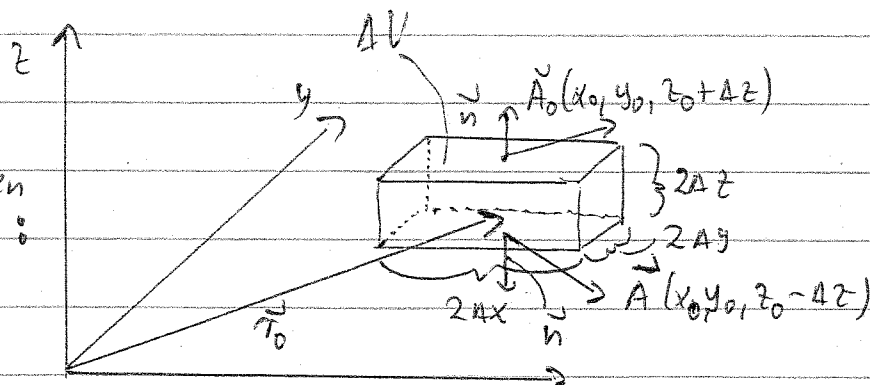
Es gilt:

$$\text{div } \vec{A}(\vec{r}_0) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_0) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

bei $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Beweis

Kasten um $\vec{r}_0$
mit Seitenlängen
 $2\Delta x, 2\Delta y, 2\Delta z$:



$$\oint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \iint dy \, dz [A_x(x_0 + \Delta x, y, z) - A_x(x_0 - \Delta x, y, z)]$$

$$+ \iint dx \, dz [A_y(x, y_0 + \Delta y, z) - A_y(x, y_0 - \Delta y, z)]$$

$$+ \iint dx \, dy [A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0 - \Delta z)]$$

Betrachte das kleine Integral:

$$A_z(x, y, z_0 \pm \Delta z) = A_z(x, y, z_0) \pm \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z_0) \Delta z$$

Taylorentwicklung

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}(x, y, z_0) \Delta z^2 + O(\Delta z^3)$$

$$\Rightarrow A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0 - \Delta z) = 2 \frac{\partial A_z}{\partial z}(x, y, z_0) \Delta z + O(\Delta z^3)$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es

$$x_0 - \Delta x \leq \tilde{x} \leq x_0 + \Delta x, \quad y_0 - \Delta y \leq \tilde{y} \leq y_0 + \Delta y, \quad \text{so dass}$$

$$\text{mit } \Delta V = 8 \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial(\Delta V)} [A_z(x, y, z_0 + \Delta z) - A_z(x, y, z_0 - \Delta z)]$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0) \frac{2 \Delta z}{8 \Delta x \Delta y \Delta z} \underbrace{\iint_{\partial(\Delta V)} dx dy}_{= 4 \Delta x \Delta y} + O(\Delta z^2)$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial z}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0)$$

Damit gilt für $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{\partial(\Delta V)} \vec{A} \cdot d\vec{F} = \frac{\partial A_x}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial A_y}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial A_z}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) =$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}_0)$$

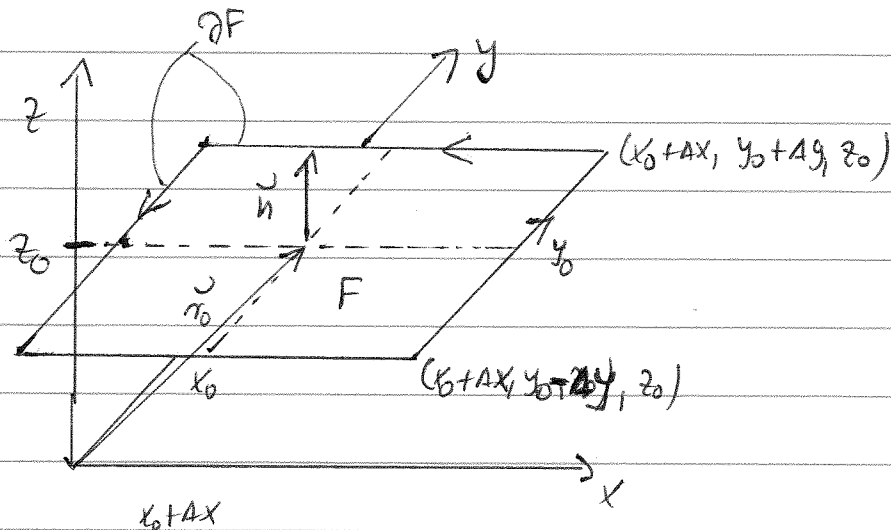
2.2. Rotation als Wirbelfeld

Es gilt:

$$\vec{n} = (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial(\Delta F)} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$\swarrow$
 Normale der
 Fläche ΔF

Beweis:



$$\oint_{\partial(\Delta F)} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} dx [A_x(x, y_0-\Delta y, z_0) - A_x(x, y_0+\Delta y, z_0)]$$

$$+ \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} dy [A_y(x_0+\Delta x, y, z_0) - A_y(x_0-\Delta x, y, z_0)]$$

$$= - \frac{\partial A_x}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0) 2\Delta y \int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x} dx + \frac{\partial A_y}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0) 2\Delta x \int_{y_0-\Delta y}^{y_0+\Delta y} dy$$

$\swarrow$
 Mittelwertsatz

$$x_0 - \Delta x \leq \tilde{x} \leq x_0 + \Delta x$$

$$y_0 - \Delta y \leq \tilde{y} \leq y_0 + \Delta y$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{\partial(\Delta F)} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{\partial A_y}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0) - \frac{\partial A_x}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}, z_0) =$$

$$= [\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}_0)]_z = \vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{r}_0)$$