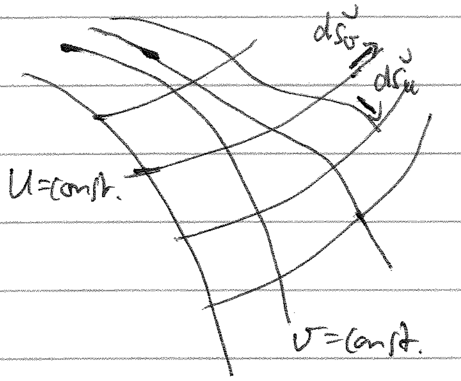
1.4. Oberflächenintegrale

$$F = \{ \vec{r} = \underbrace{\vec{r}(u,v)} \mid u, v \in \text{Definitionsbereich} \}$$

allgemeine krummlinige Koordinaten



$$d\vec{s}_u := \vec{r}(u+du, v) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du$$
$$d\vec{s}_v := \vec{r}(u, v+dv) - \vec{r}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv$$

$$\vec{r}_u := \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \qquad \vec{r}_v := \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$$

$\to$ Parallelogramm aufgespannt von $d\vec{s}_u$ und $d\vec{s}_v$

$\Rightarrow$ Flächenelement $d\vec{F} = d\vec{s}_u \times d\vec{s}_v = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$

Flächennormale $\vec{n}_F = \dfrac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$

$\Rightarrow$ $d\vec{F} = \vec{n}_F dF \qquad dF = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\, du\, dv$

Beispiel: Kugelkoordinaten: Kugeloberfläche $r = $ const.

$$\vec{r}_\theta = b_\theta \vec{e}_\theta = r \vec{e}_\theta \;; \quad \vec{r}_\varphi = b_\varphi \vec{e}_\varphi = r \sin\theta\, \vec{e}_\varphi \;; \quad \vec{e}_r = \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{F} = \vec{r}_\theta \times \vec{r}_\varphi\, d\theta\, d\varphi = \vec{e}_r\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \vec{e}_r\, r^2\, d\Omega$$

Raumwinkel Element

Der Fluß eines Vektorfeldes $\vec{A}$ durch eine Fläche F ist dann

$$\Phi := \int_F \vec{A} \cdot d\vec{F} = \iint_F \vec{A}(\vec{r}(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv$$

z.B. Teilchen mit Dichte n bewegen sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$

$$\vec{A} = n\vec{v} = n(\vec{r})\ \vec{v}(\vec{r})$$

Dichtefeld Geschwindigkeitsfeld

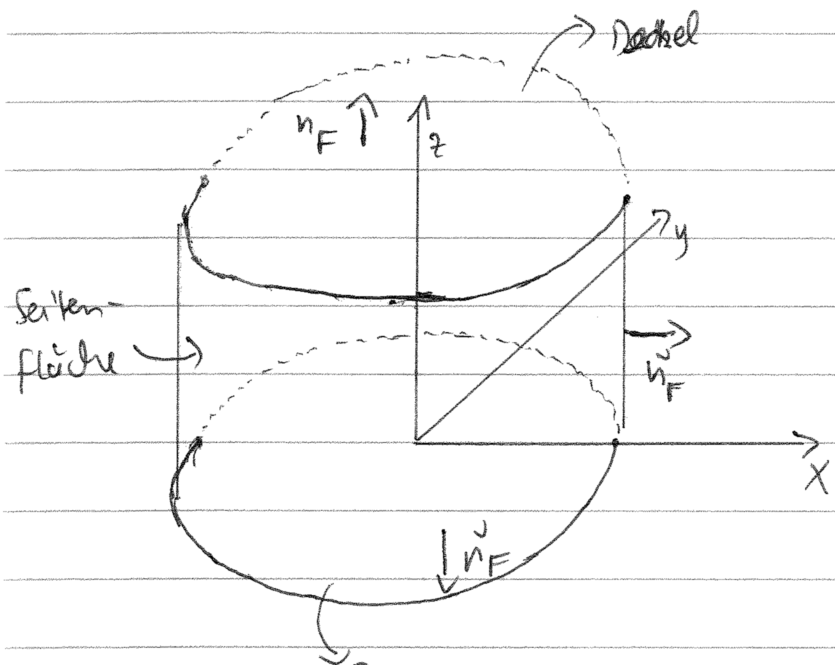
$$d\Phi = \vec{A}\cdot d\vec{F} = \vec{A}\cdot\vec{n}_F\, dF = n\, v \cos\varphi\, dF$$

Winkel zwischen $\vec{n}_F$ und $\vec{v}$

Wenn $\mathcal{F}$ geschlossene Fläche, zeigt $\vec{n}_F$ per Definition nach außen:

$$\Phi = \oiint_{\mathcal{F}} \vec{A}\cdot d\vec{F}$$

Beispiel 1: Oberflächenintegral über geschlossene Zylinderfläche:



$$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 16;\ 0 \le z \le 5\}$$
$$+ \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \le 16,\ z = 0, 5\}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = (x,\ zy,\ y^2 z)$$

Boden: $\vec{n}_F = (0,0,-1) \Rightarrow \vec{n}_F\cdot\vec{A} = 0$ da $z=0 \Rightarrow \Phi_{Boden} = 0$

Deckel: $\vec{n}_F = (0,0,1) \Rightarrow \vec{n}_F\cdot\vec{A} = 5y^2$ da $z=5$

parametrisiere Deckel mit ebenen Polarkoordinaten:

$$0 \le r \le 4, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\vec{r}(r,\varphi) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 5) \quad \Rightarrow \quad dF = r\,dr\,d\varphi$$

$$\Rightarrow \Phi_{Deckel} = \int \vec{n}_F \cdot \vec{A}\, dF = 5\int_0^4 dr\, r^3 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi}_{=\pi}$$

$$\downarrow$$

$$y = r\sin\varphi$$

$$= 5\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^4 = 5\pi \cdot 4^3 = 320\pi$$

Seitenfläche: parametrisiere durch

$$0 \le v \le 5, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$\vec{r}(v,\varphi) = (4\cos\varphi,\ 4\sin\varphi,\ v)$$

$$\Rightarrow \vec{r}_v = (0,0,1) \qquad \vec{r}_\varphi = (-4\sin\varphi,\ 4\cos\varphi,\ 0) = 4\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{r}_\varphi \times \vec{r}_v = (4\cos\varphi,\ 4\sin\varphi,\ 0) \Rightarrow d\vec{F} = 4(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)\,d\varphi\, dv$$

$$\cancel{\Rightarrow \Phi_{Seite} =} \qquad \vec{A}(\vec{r}(v,\varphi)) = (4\cos\varphi,\ 4v\sin\varphi,\ 16\sin^2\varphi \cdot v)$$

$$\Rightarrow \Phi_{Seite} = \int_{Seite} \vec{A}\cdot d\vec{F} = 16\int_0^5 dv \int_0^{2\pi} d\varphi\,(\cos^2\varphi + v\sin^2\varphi)$$

$$= 16\pi\int_0^5 dv\,(1+v) = 16\pi\left.\left(v + \frac{v^2}{2}\right)\right|_0^5 = 8\cdot 35\pi = 280\pi$$

$$\Rightarrow \Phi = \Phi_{Boden} + \Phi_{Deckel} + \Phi_{Seite} = 600\pi$$

Später werden wir sehen daß dies identisch ist zu

$$\int dV\, \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{A} = 1 + z + y^2$

in Zylinderkoordinaten ist $dV = r\,dr\,d\varphi\,dz$

$y = r \sin\varphi$

$$\Rightarrow \int dV\, \tilde{\nabla} \cdot \tilde{A} = \int_0^4 dr \int_0^5 dz \int_0^{2\pi} d\varphi\; r\left(1 + z + r^2 \sin^2\varphi\right)$$

$$= \int_0^4 dr \int_0^5 dz \left[2\pi r(1+z) + \pi r^3\right] =$$

$$= \pi \int_0^4 dr \left(10r + 2\frac{25}{2}r + 5r^3\right) = \pi\left(10 \cdot \frac{16}{2} + 2\frac{25}{2} \cdot \frac{16}{2} + 5 \cdot \frac{4^4}{4}\right)$$

$$= \pi\left(80 + 200 + 5 \cdot 64\right) = \pi(280 + 320) = 600\pi$$

also ist tatsächlich $\int_{F = \partial V} \tilde{A} \cdot d\tilde{F} = \Phi = \int_V \tilde{\nabla} \cdot \tilde{A}\, dV$