wenn ja, dann gilt

$$u(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,; \qquad v(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}}_{\text{"notwendige Bedingung"}} \qquad \text{wegen Satz von Schwarz} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Wir werden zeigen daß dies auch hinreichende Bedingung ist für "einfach zusammenhängende Gebiete", i.e. in denen sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

Beispiel 1:

$$u\,dx + v\,dy = (x^2 + 2xy)\,dx + (y^4 + \lambda x^2)\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2x\,; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2\lambda x$$

ist totales Differential $\Leftrightarrow \lambda = 1$

für $\lambda = 1$ $\qquad f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 y + \frac{1}{5}y^5 + c$

In $\mathbb{R}^3$:

$$u(x,y,z)\,dx + v(x,y,z)\,dy + w(x,y,z)\,dz$$

ist totales Differential $\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Beispiel 1:

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = (2x^2 + 2xy + 2xz^2)\,dx + x^2\,dy + 2x^2 z\,dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 2x = \frac{\partial v}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial w}{\partial x}\,; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0 = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 y + x^2 z^2 + c$$

Beispiel 2: $\quad yz\,dx + xz\,dy + xyz\,dz \quad$ ist kein totales Differential

da z.B. $\frac{\partial w}{\partial x} = yz \neq \frac{\partial u}{\partial z} = y$

Sei $f(\vec r)$ skalare Funktion

$$\Rightarrow \quad df = \vec F \cdot d\vec r \quad \text{mit } \vec F = \vec\nabla f$$

$$\Rightarrow \quad \int_{C_{A,B}} \vec F \cdot d\vec r = \int_{\vec r_A}^{\vec r_B} df = f(\vec r_B) - f(\vec r_A) \quad \text{ist wegunabhängig}$$

Sei umgekehrt $\int_{C_{A,B}} \vec F \cdot d\vec r$ wegunabhängig, dann definiere

$$f(\vec r) = \int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F \cdot d\vec r + \text{Const.}$$

für beliebiges festes $\vec r_0$ und beliebigen Weg von $\vec r_0$ nach $\vec r$

$$\Rightarrow \quad \vec F = \vec\nabla f \quad \text{ist totales Differential}$$

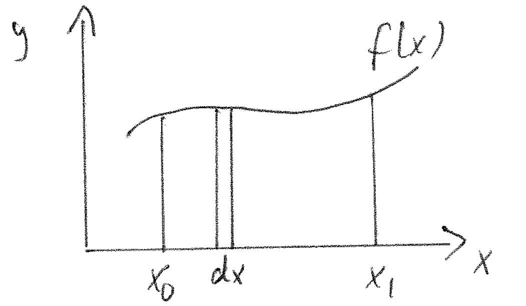
Damit ist auch gezeigt, daß die Integrale von obigem Beispiel,

$$\vec F(\vec r) = (2x^2 + 2xy + 2xz^2,\ x^2,\ 2x^2 z)$$

wegunabhängig sind.

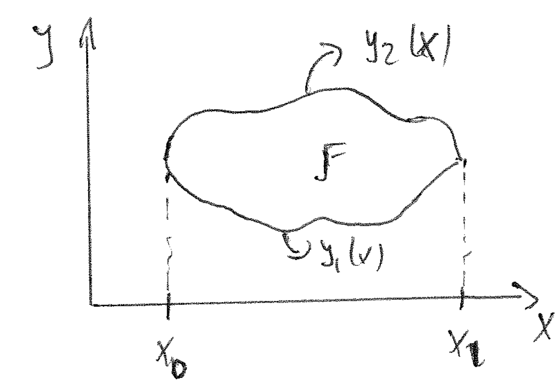
1.3. Flächen- und Volumenintegrale

Wiederholung: Eindimensionale Integrale



$$I = \int_{x_0}^{x_1} dx\, f(x)$$

Zweidimensionale Integrale:



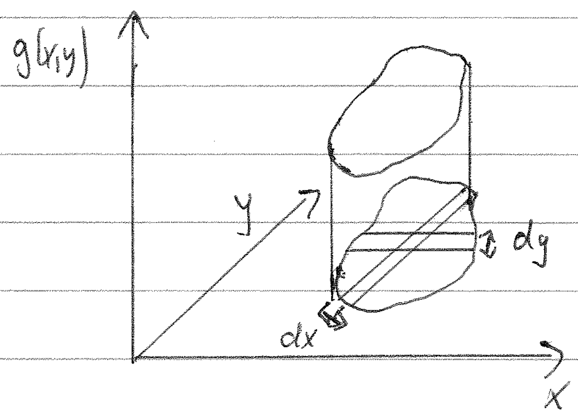
$$I = \iint_F dx\,dy\; g(x,y) = \int_F d^2\vec r\; g(\vec r) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\; g(x,y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} dx \left[G(x, y_2(x)) - G(x, y_1(x)) \right]$$

wobei $G(x,y)$ = Stammfunktion von $g(x,y)$ bzgl. y: $\frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = g(x,y)$

Integral I = Volumen unter $g(x,y)$ über $\mathcal{F}$



Reihenfolge der Integration ist vertauschbar

dreidimensionale Integrale:

$$I = \iiint_V dx\,dy\,dz\; g(x,y,z) = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} dz\; g(x,y,z)$$

$$= \int_V d^3\vec{r}\; g(\vec{r})$$

Flächenelement $\quad dF = d^2\vec{r} = dx\,dy$

Volumenelement $\quad dV = d^3\vec{r} = \underbrace{dx\,dy\,dz}_{\text{nur für kartesische Koordinaten}}$

Beispiel 1: $\quad g(\vec{r}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \iint_{\mathcal{F}} dx\,dy = \int_{\mathcal{F}} dF = F \rightarrow$ Flächeninhalt

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = \int_V dV = V \rightarrow \text{Volumen}$$

Beispiel 2: $\quad g(x,y) = 1, \quad \mathcal{F} = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\; x^4 \le y \le x\}$

$$\Rightarrow I = \int dF = \int_0^1 dx \int_{x^4}^{x} dy = \int_0^1 dx\; y\Big|_{x^4}^{x} = \int_0^1 dx\,(x - x^4)$$

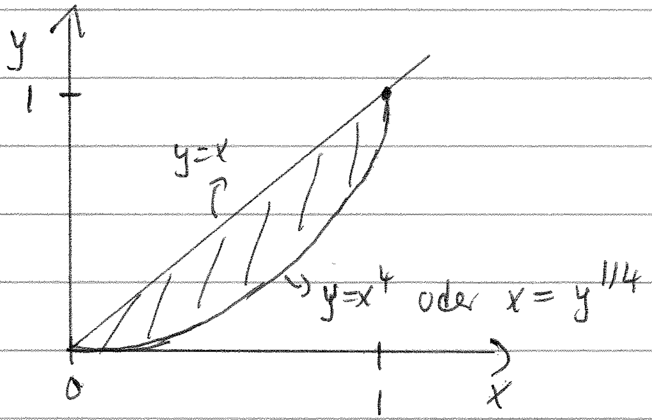
$$= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

Vertauschung der Reihenfolge: $\mathcal{F} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ y \le x \le y^{1/4}\}$

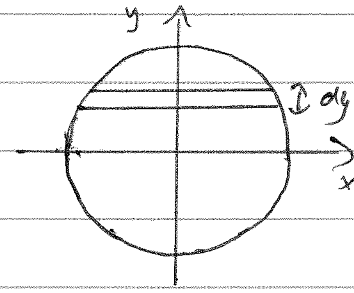
$\Leftrightarrow\ x^4 \le y \le x$

$$\Rightarrow\ I = \int_0^1 dy \int_y^{y^{1/4}} dx = \int_0^1 dy\,(y^{1/4} - y) =$$

$$= \left(\frac{4}{5} y^{5/4} - \frac{1}{2} y^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$



Beispiel 3: Kreisfläche $\sqrt{x^2+y^2} \le R$



$$F = \int_{-R}^{+R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx = 2 \int_{-R}^{R} dy \sqrt{R^2-y^2} =$$

$$= 2\left[-\frac{R^2}{2} \arccos\frac{y}{R} + \frac{y}{2}\sqrt{R^2-y^2}\right]\Bigg|_{-R}^{+R}$$

$$\left[-\frac{R^2}{2} \arccos\frac{y}{R} + \frac{y}{2}\sqrt{R^2-y^2}\right]' = \frac{R}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}} + \frac{1}{2}\sqrt{R^2-y^2} - \frac{y^2}{2}\frac{1}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(R^2-y^2)}{\sqrt{R^2-y^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{R^2-y^2} = \sqrt{R^2-y^2}$$

$;\ \arccos(1) = 0\ ;\ \arccos(-1) = \pi$

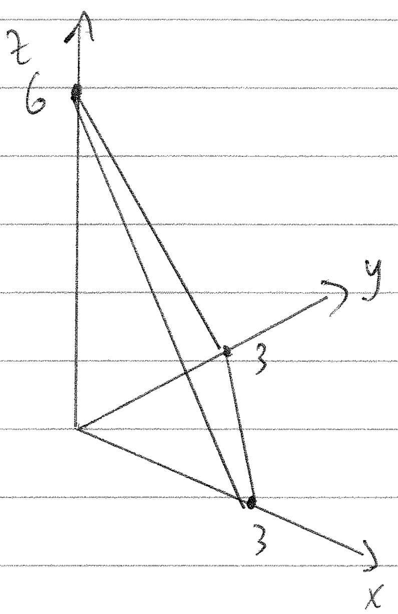
$$\Rightarrow\ F = \pi R^2$$

einfacher in ebenen Polarkoordinaten:

$$F = \int_0^R r\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

Beispiel 4: $V = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 3;\ 0 \le y \le 3-x;\ 0 \le z \le 6-2x-2y\}$

$g(x,y,z) = xyz$



Pyramide

$$\Rightarrow I = \int_V dV\, g(\vec{r}) = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_0^{6-2x-2y} dz\; xyz =$$

$$= \int_0^3 dx\, x \int_0^{3-x} dy\, y\, \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{6-2x-2y} = \int_0^3 dx\, x \int_0^{3-x} dy\, \frac{y}{2}(6-2x-2y)^2$$

$$= 2\int_0^3 dx\, x \int_0^{3-x} dy \left[(3-x)^2 y - 2(3-x)y^2 + y^3\right]$$

$$= 2\int_0^3 dx\, x \left[\frac{1}{2}(3-x)^2 y^2 - \frac{2}{3}(3-x)\, y^3 + \frac{1}{4} y^4\right]_0^{3-x}$$

$$= 2\int_0^3 dx\, x \left[\frac{1}{2}(3-x)^4 - \frac{2}{3}(3-x)^4 + \frac{1}{4}(3-x)^4\right]$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^3 dx\, x\,(3-x)^4 \underset{u=3-x}{=} -\frac{1}{6}\int_3^0 du\,(3-u)u^4 = \frac{1}{6}\int_0^3 du\,(3u^4-u^5)$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{3}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^3 = \frac{3^6}{6}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) = \frac{3^5}{2}\,\frac{1}{5\cdot 6} = \frac{81}{20}$$