

2.) Endliche Wellenzug

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} & -T < t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega_0 - \omega)} e^{i(\omega_0 - \omega)t} \Big|_{-T}^{+T} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\omega_0 - \omega)T}{\omega_0 - \omega} \end{aligned}$$

3.) Gauß-Puls

$$f(t) = f_0 e^{-\lambda t^2}$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2 - i\omega t} dt = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda(t + \frac{i\omega}{2\lambda})^2} dt$$

quadratische

Ergänzung im Exponenten

$$= \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/4\lambda} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t^2} dt}_{= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}} = \frac{f_0}{\sqrt{2\lambda}} e^{-\omega^2/4\lambda}$$

6.3. Anwendungen der Fouriertransformation

1.) Gepulster harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

$f(t)$: beliebige Funktion

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ansatz:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Dann ist $F[x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x] = F[f]$

$$\Rightarrow (-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) g(\omega) = g(\omega)$$

$$\Rightarrow g(\omega) = \frac{g(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

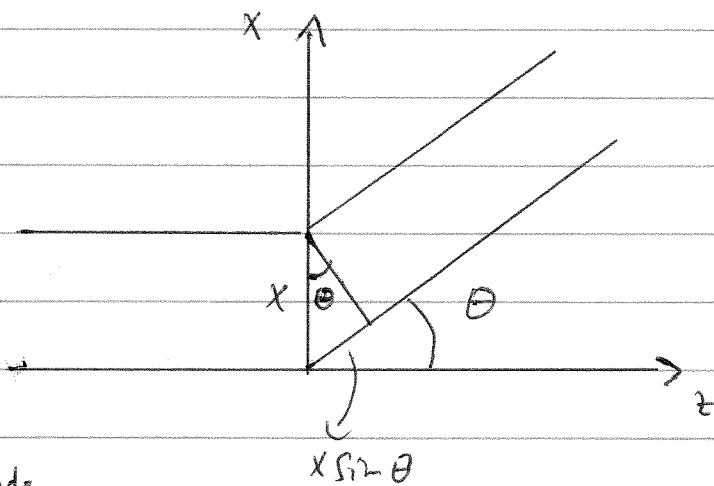
mit (analog zum Fall periodischer Funktionen mit Fourierreihen):

$$|g(\omega)|^2 = \frac{|g(\omega)|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} = \frac{|g(\omega)|^2}{[\omega^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2)]^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - \gamma^2)}$$

Damit ist

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} e^{i\omega t} d\omega$$

2.) Beugungsgitter



parallele Spalten in
y-Richtung
Licht mit Wellenlänge λ

Amplitude

$$\Rightarrow E(\theta) = E(0) \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) e^{-2\pi i x \sin \theta / \lambda} dx$$

Transmissions-
funktion

Phasenverschiebung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t(x) dx = 1$$

also $E(\theta) = F[\tau] (2\pi \sin \theta / \lambda)$

$$I(\theta) = |E(\theta)|^2$$

Beispiele für $\tau(x)$:

a) $\tau_b(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} & |x| \leq b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Spaltbreite b

$$\Rightarrow E(\theta) = \frac{E(0)}{b} \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2\pi i x \sin \theta / \lambda} dx = E(0) \frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda}$$

und

$$I(\theta) = |E(\theta)|^2 = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin \theta / \lambda)}{\pi b \sin \theta / \lambda} \right]^2$$

b) N gleiche Spalte im Abstand $d > b$

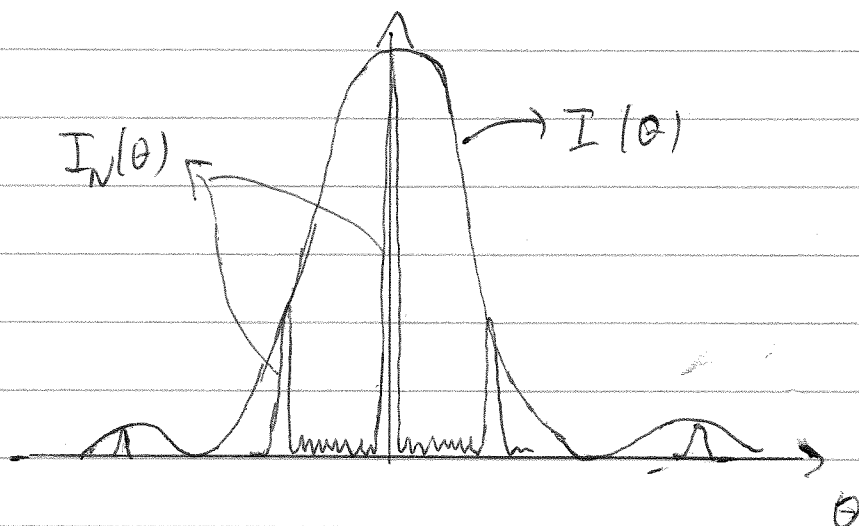
$$\tau_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tau_b(x - nd)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(\theta) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \underbrace{F[\tau_b(x - nd)]}_{= F[\tau_b] e^{-2\pi i n d \sin \theta / \lambda}} (2\pi \sin \theta / \lambda) \\ &= F[\tau_b] e^{-2\pi i n d \sin \theta / \lambda} (2\pi \sin \theta / \lambda) e^{-2\pi i n d \sin \theta / \lambda} \\ &\quad \text{nach Eigenschaft (3)} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{E(\theta)}_{\text{für einen Spalt}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i n d \sin \theta / \lambda} =$$

$$= E(\theta) \frac{e^{-2\pi i d \sin \theta / \lambda}}{N} \frac{1 - e^{-2\pi i N d \sin \theta / \lambda}}{1 - e^{-2\pi i d \sin \theta / \lambda}}$$

$$\Rightarrow I_N(\theta) = \underbrace{I(\theta)}_{\text{ein Spalt}} \left[\frac{\sin(N\pi d \sin \theta / \lambda)}{N \sin(\pi d \sin \theta / \lambda)} \right]^2$$



3) Mehrdimensionale Fourier transformationen

Beispiel: elektromagnetische Felder in $(t, \vec{r})$:

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \vec{B}(\omega, \vec{k}) e^{-i(\underbrace{\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}}_{\text{Lorentz-Invariante}})} d^3 \vec{k} d\omega$$

$$\vec{B}(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint \vec{B}(t, \vec{r}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d^3 \vec{r} dt$$

analog für andere Felder

Beachte: Diese Felder bestehen aus 3 Komponenten auf die die Fourier transformation separat angewandt wird.