

6. Fourier transformationen

6.1 Fourierreihen

Sei $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ eine hinreichend "glatte", d.h. stetige und differenzierbare Funktion die periodisch mit Periode L ist, d.h.

$$f(x+L) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dann kann $f(x)$ in eine Fourierreihe "entwickelt" werden:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} g_n e^{2\pi i n x / L}$$

wobei

$$g_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx$$

für beliebige $x_0 \in \mathbb{R}$, also z.B. $x_0 = 0$ oder $x_0 = -\frac{L}{2}$

Beweis:

$$R.S. = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx = \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g_m \int_{x_0}^{x_0+L} e^{(2\pi i x / L)(m-n)} dx$$

$$\int_{x_0}^{x_0+L} e^{(2\pi i x / L)(m-n)} dx = \begin{cases} L & \text{für } m=n \\ \frac{L}{2\pi i(m-n)} \left(e^{\frac{2\pi i(x_0+L)}{L}(m-n)} - e^{\frac{2\pi i x_0}{L}(m-n)} \right) & m \neq n \end{cases}$$
$$= e^{\frac{2\pi i x_0}{L}(m-n)} \left[e^{2\pi i} - 1 \right] = 0$$

$$\Rightarrow R.S. = g_n \quad \checkmark$$

Für Zeitreihen schreibt man oft

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n e^{in\omega t} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Wenn $f(t)$ Periode T hat, also

$$g_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

Parseval - Identität:

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f|f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T f^*(t) f(t) dt = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m,n} g_m^* g_n \underbrace{\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt}_{= \delta_{nm} \cdot T} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g_n|^2 \end{aligned}$$

Beispiel: Periodisch angetriebener gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (*)$$

mit $f(t) = \cancel{f_0 e^{i\omega t}} f(t+T)$

Ansatz:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} \quad ; \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\omega t}$$

mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Einsetzen in Differentialgleichung (*)

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-(n\omega)^2 + 2i\gamma n\omega + \omega_0^2 \right] b_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t}$$

oder in symmetrischer Schreibweise mit $g(k) = \sqrt{2\pi} h(k)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikh} dk$$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikh} dx$$

kurz:

$$g = F[f] \quad f = F^{-1}[g]$$

Eigenschaften:

(1) Linearität: $F[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 F[f_1] + c_2 F[f_2]$

(2) Skalengesetz: $F[f(\alpha x)](k) = \frac{1}{|\alpha|} F[f(x)]\left(\frac{k}{\alpha}\right)$

durch Substitution $x' = \alpha x$ in Definition

(3) Verschiebungsregel: $F[f(x-x_0)] = e^{-ikhx_0} F[f(x)]$

durch Substitution $x' = x - x_0$

(4) Ableitungen: $F[f'(x)] = ik F[f(x)]$

Beweis: $F[f'(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ikhx} dx =$ ↪ partielle Integration

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{f(x) e^{-ikhx}}_{\substack{= 0 \text{ für schnell} \\ \text{abfallende, integrierbare Funktion}}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikhx} dx$$

$$= ik F[f(x)]$$

Koeffizientenvergleich

$$\Rightarrow b_n = \frac{f_n}{\omega_0^2 - (n\Omega)^2 + 2i\delta n\Omega}$$

wie schon in der Physik I für einen rein harmonischen Antrieb

$$|b_n|^2 = \frac{|f_n|^2}{(\omega_0^2 - \Omega_n^2)^2 + 4\delta^2 \Omega_n^2} = \frac{|f_n|^2}{[\Omega_n^2 - (\omega_0^2 - 2\delta^2)]^2 + 4\delta^2(\omega_0^2 - \delta^2)}$$

mit $\Omega_n = n\Omega$.

Maximum bei $\Omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, Breite $\Delta = 2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

6.2. Fouriertransformation

Für $\downarrow L \rightarrow \infty$ lassen sich auch nicht-periodische Funktionen
Periode

auf $\mathbb{R}$ entwickeln: Definiere $p := \frac{2\pi n}{L}$; $h(p) := \frac{L g_n}{2\pi}$

$\Rightarrow \Delta n = 1$, $\Delta p = \frac{2\pi \Delta n}{L} = \frac{2\pi}{L}$, also für $L \rightarrow \infty$, $\Delta p \rightarrow 0$:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{2\pi i n x / L} \quad \underbrace{\Delta n}_{=1} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} h(p) e^{L p x} \Delta p$$

$$\xrightarrow{\Delta p \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} h(p) e^{i p x} dp$$

$$h(p) = \frac{L}{2\pi} \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-i p x} dx$$

$$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i p x} dx$$

(5) Darstellung der Delta-Funktion:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikh} dh$$

Beweis: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{ikh} dh =$

$$\downarrow = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right] e^{ikh} dh =$$

Einsetzen $g(k)$

$$\downarrow = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')} dh \right] f(x') dx'$$

Tauschen Integrationsreihenfolge

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x') f(x') dx' \quad \sim$$

(6) Parseval - Identität

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^*(k) g_2(k) dk$$

$\downarrow$
"Überlapp-Integral" oder "Skalarprodukt"
im Fourierreum

Beweis: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(x) f_2(x) dx =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(k) e^{ikh} dh \right]^* \left[\int_{-\infty}^{+\infty} g_2(k') e^{ik'x} dk' \right] dx$$

$$\downarrow = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^*(k) g_2(k') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k'-k)x} dx \right]}_{= \delta(k'-k)} dk dk'$$

$\downarrow$
vertauschen Integrationsreihenfolge

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1^*(k) g_2(k) dk$$

(7) Faltungssatz

Definiere $(f \otimes g)(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(y-x) dx$

Dann gilt:

$$F[f \otimes g] = F[f] F[g]$$

und auch

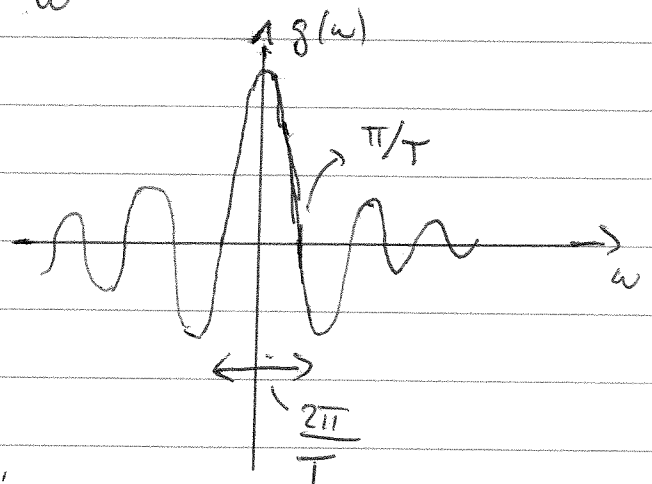
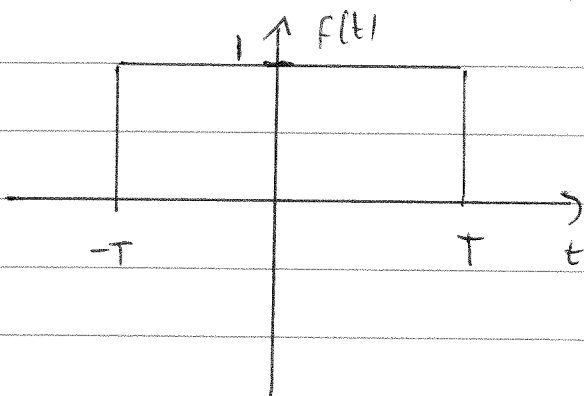
$$F[Fg] = F[f] \otimes F[g]$$

Beispiele Fouriertransformationen:

1.) Rechteck-Puls in der Zeit:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -T < t < T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{+T} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-T}^{+T} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}\omega} \frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{2i} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega T}{\omega} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \Delta\omega \approx \frac{1}{\Delta t} \quad \text{"Unschärferelation"}$$