0. Vorblick / Motivation für die benötigten Konzepte der klassischen Feldtheorie:

Wie auch die klassische Mechanik (Physik I) wird Elektromagnetismus durch Vektor- und Skalarfelder beschrieben:

Vektorfelder: Gravitationsfeld $\vec{F}_N = -G_N \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$

elektrisches Feld $\vec{E}$, magnetisches Feld $\vec{B}$, Stromdichte $\vec{j}$

Skalarfelder: Massendichte $\rho(\vec{r})$, Ladungsdichte $\rho_e(\vec{r})$

Maxwell'sche Gleichungen:

Differentialform	Integralform
Gauß: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$	Fluß ~~von~~ von $\vec{E}$ durch geschlossene Fläche S $\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\text{Ladung in } S}{\varepsilon_0}$
$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$ Induktionsgesetz	Linienintegral von $\vec{E}$ über Schleife ∂S $\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} =$ $= -\frac{\partial}{\partial t}$ Fluß von $\vec{B}$ durch S
Gauß: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Fluß von $\vec{B}$ durch geschlossene Fläche S $= 0$ $\Leftrightarrow$ keine magnetischen Monopole
$\boxed{c_0^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$ Ampèresches Gesetz	c_0^2 (Linienintegral von $\vec{B}$ über Schleife ∂S) $c_0^2 \oint_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \frac{I}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$ $= \frac{\text{elektrische Strom durch } S}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}$ (Fluß von $\vec{E}$ durch S)

Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} F_i(\vec{r})\,\vec{e}_i$

$\vec{e}_i$: Einheitsvektor

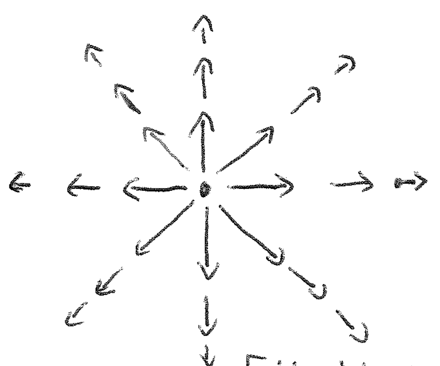
Beispiele:

a) Feld einer Punktladung oder Punktmasse bei $\vec{r} = \vec{r}_0$:

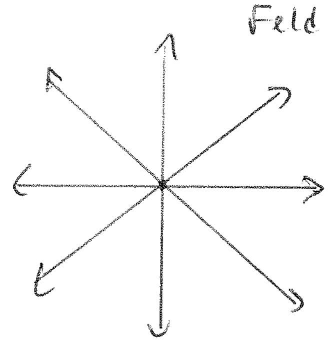
$$\vec{F} = \alpha \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

$\alpha = -G_N m_1 m_2$ für Gravitation

$\alpha = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$ für Elektrostatik, ε_0 = Dielektrizitätskonstante



Feldvektoren

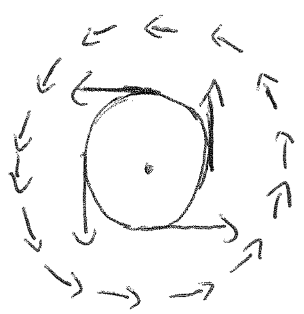


Feldlinien

b) Magnetfeld um Linienstrom:

in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c_0^2 \rho}\,\vec{e}_\varphi$$



Lorentzkraft:

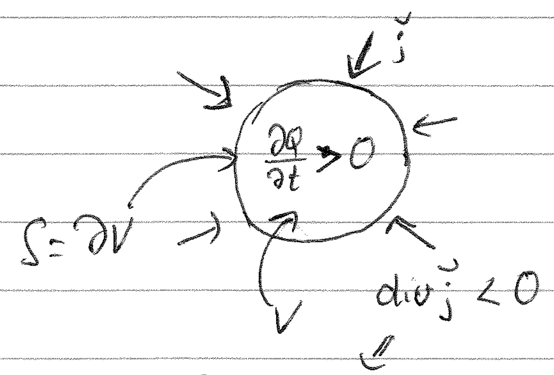
$$\vec{F} = \underbrace{e}_{\text{Ladung}} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Ladungserhaltung folgt aus Maxwell's Gleichungen:

Divergenz des Ampèreschen Gesetzes:

$$\underbrace{c_0^2 \, \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{=0} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\varepsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \text{ nach 1. Maxwell-Gleichung}} = \frac{\partial \rho_e / \partial t}{\varepsilon_0} + \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \rightarrow \text{Kontinuitätsgleichung}$$



Interpretation:
Ladungsdichte kann sich nur ändern aufgrund von Zu- oder Abfluß eines Stroms, beschrieben durch $\text{div}\, \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$

Strom fließt ins Innere von S

Gaußscher Satz: $$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_e \, dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \, dV \underset{\text{Gauß'scher Satz}}{=}$$

$$= - \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Ausblick:

Elektrostatik $\Rightarrow$ $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Induktionsgesetz

$\Rightarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ ist Gradientenfeld

Konvention

Einsetzen in 1. Maxwell Gleichung

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi = \Delta\phi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\phi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \text{ Poissongleichung}$$

Wir werden sehen daß

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho_e(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, d^3 r'$$

eine Lösung ist. Da ferner

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

$$= -\frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-x' \\ y-y' \\ z-z' \end{pmatrix} = -\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

hat man für das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho_e(\vec{r}\,')\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, d^3 r' \quad \rightarrow \text{ C. Hagner}$$

1. Integrale über Vektorfelder

1.1. Kurvenintegrale über Vektorfelder

Integrale Eigenschaften sind verknüpft mit lokalen (differentiellen) Eigenschaften:

$$\mathrm{div}\,\breve{F} = \breve{\nabla}\cdot\breve{F} \qquad \text{"Quellstärke"}$$

$$\mathrm{rot}\,\breve{F} = \breve{\nabla}\times\breve{F} \qquad \text{"Verwirbelung"}$$

Gegeben sei $\breve{F}(\breve{r})$ und Kurve C von $\breve{r} = \breve{r}_A$ nach $\breve{r} = \breve{r}_B$:

$$C = \left\{ \breve{r} = \breve{r}(t) \;\middle|\; t_A \le t \le t_B \text{ wobei } \breve{r}(t_A) = \breve{r}_A,\ \breve{r}(t_B) = \breve{r}_B \right\}$$

Sei $\quad t_A = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_N = t_B$,

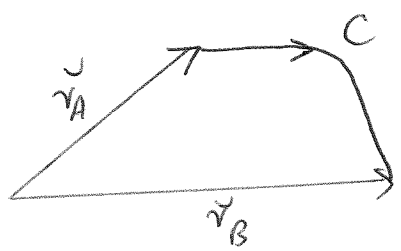
$\breve{r}_i := \breve{r}(t_i)$, $\quad \Delta\breve{r}_i = \breve{r}_i - \breve{r}_{i-1}$, $\quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$

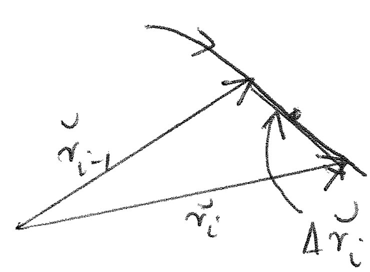
dann ist

$$\int_C \breve{F}(\breve{r})\cdot d\breve{r} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \breve{F}(\breve{r}_i)\cdot\Delta\breve{r}_i = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \breve{F}(\breve{r}_i)\,\frac{\Delta\breve{r}_i}{\Delta t_i}\,\Delta t_i$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \breve{F}(\breve{r}(t))\cdot\frac{d\breve{r}}{dt}\cdot dt$$

wobei im Grenzübergang $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\Delta t_i = \lim_{N\to\infty}\Delta\breve{r}_i = 0$





Eigenschaften:

a) $$\int_{-C} \breve{F} \cdot d\breve{r} = - \int_{C} \breve{F} \cdot d\breve{r}$$

b) $$C = C_1 + C_2 \Rightarrow \int_{C} \breve{F} \cdot d\breve{r} = \int_{C_1} \breve{F} \cdot d\breve{r} + \int_{C_2} \breve{F} \cdot d\breve{r}$$

(Additivität)

physikalisches Beispiel: Arbeit entlang einer Wegstrecke

$$W = - \int \breve{F} \cdot d\breve{r}$$

<u>Beispielrechnungen:</u>

1.) Gegeben sei $\breve{F}(\breve{r}) = (3x^2 + 6y)\,\breve{e}_x - 14yz\,\breve{e}_y + 20xz^2\,\breve{e}_z$

$$= (3x^2 + 6y,\ -14yz,\ 20xz^2)$$

Berechne $\int_C \breve{F} \cdot d\breve{r}$ entlang drei verschiedener Wege von $\breve{r}_A = (0,0,0)$ nach $\breve{r}_B = (1,1,1)$

a) entlang Polygonzug C_a

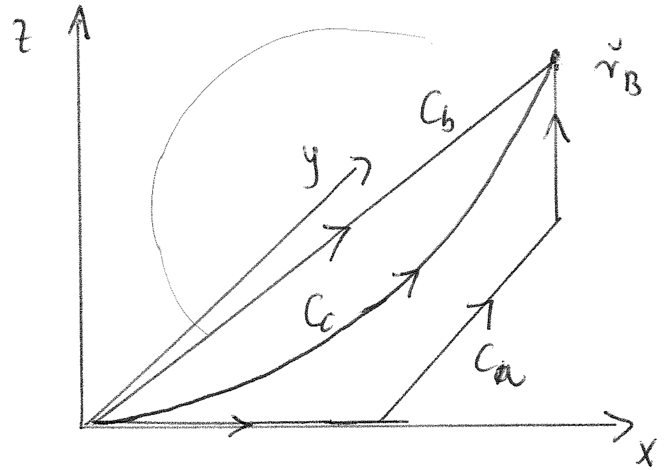
C_1: von $(0,0,0)$ auf gerader Linie nach $(1,0,0)$

C_2: von $(1,0,0)$ auf gerader Linie nach $(1,1,0)$

C_3: von $(1,1,0)$ auf gerader Linie nach $(1,1,1)$

b) entlang der geraden Linie C_b von $\breve{r}_A$ nach $\breve{r}_B$

c) entlang gekrümmter Kurve C_c, $\breve{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ von $\breve{r}_A$ nach $\breve{r}_B$, $0 \le t \le 1$



a) $C_a = C_1 + C_2 + C_3$ $\quad C_1: d\breve{r} = \breve{e}_x dx$, $C_2: d\breve{r} = \breve{e}_y dy$, $C_3: d\breve{r} = \breve{e}_z dz$

$$\Rightarrow \int_{C_a} \breve{F}\cdot d\breve{r} = \int_{C_1} \breve{F}\cdot d\breve{r} + \int_{C_2} \breve{F}\cdot d\breve{r} + \int_{C_3} \breve{F}\cdot d\breve{r} =$$

$$= \int_0^1 (3x^2 + 6\cdot 0)dx - \int_0^1 14y\cdot 0\, dy + \int_0^1 20\cdot 1\cdot z^2 dz$$

$$= \frac{3}{3}x^3\Big|_0^1 - 0 + \frac{20}{3}z^3\Big|_0^1 = 1 + \frac{20}{3} = \frac{23}{3}$$

b) $\breve{r}(t) = (t,t,t)$, $0 \le t \le 1$, $\quad \frac{d\breve{r}}{dt} = (1,1,1)$, $\quad \breve{F}(\breve{r}(t)) = (3t^2+6t, -14t^2, 20t^3)$

$$\Rightarrow \int_{C_b} \breve{F}\cdot d\breve{r} = \int_0^1 (3t^2+6t, -14t^2, 20t^3)\overset{\text{Skalar produkt}}{\cdot}(1,1,1)\,dt$$

$$= \int_0^1 (20t^3 - 11t^2 + 6t)\,dt = \frac{20}{4}t^4\Big|_0^1 - \frac{11}{3}t^3\Big|_0^1 + \frac{6}{2}t^2\Big|_0^1$$

$$= 5 - \frac{11}{3} + 3 = \frac{13}{3}$$

c) $\frac{d\breve{r}}{dt} = (1, 2t, 3t^2)$; $\breve{F}(\breve{r}(t)) = (3t^2+6t^2, -14t^2t^3, 20t\,t^6) = (9t^2, -14t^5, 20t^7)$

$$\Rightarrow \int_{C_c} \breve{F}\cdot d\breve{r} = \int_0^1 (9t^2, -14t^5, 20t^7)\cdot(1, 2t, 3t^2)\,dt$$

$$= \int_0^1 (9t^2 - 28t^6 + 60t^9)\,dt = \frac{9}{3}t^3\Big|_0^1 - \frac{28}{7}t^7\Big|_0^1 + \frac{60}{10}t^{10}\Big|_0^1 =$$

$$= 3 - 4 + 6 = 5$$

2.) Berechne nun $\int_C \breve{F}\cdot d\breve{r}$ für die gleichen Kurven C_a, C_b, C_c, aber für

$$\breve{F}(\breve{r}) = (2x^2 + 2xy + 2xz^2, x^2, 2x^2 z)$$

Man zeigt leicht, daß alle Wegintegrale gleich sind.
Wir werden zeigen daß dies für beliebige Wege gilt.

3.) Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0 = \text{const.}$ und C ein Kreis um $\vec{r} = (0,0,0)$ mit Radius R in der xy-Ebene.

Parametrisierung $\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = R(-\sin t, \cos t, 0)$$

$$\Rightarrow \int_{\text{Kreis}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = R \int_0^{2\pi} \vec{F}_0 \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt =$$

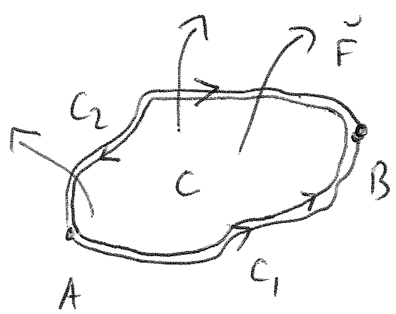
$$= R\vec{F}_0 \cdot \left(-\int_0^{2\pi} \sin t\, dt, \int_0^{2\pi} \cos t\, dt, 0\right) = R\vec{F}_0 \cdot \vec{0} = 0$$

Definition: C sei geschlossene Kurve

$Z_C := \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ heißt "Zirkulation" von $\vec{F}$

1.2. Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Kurvenintegrale zwischen beliebigen Punkten A und B sind genau dann wegunabhängig wenn Zirkulation um beliebige geschlossene Kurven verschwindet:



$$Z_C = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Differentialformen und totales Differential

Betrachte in $\mathbb{R}^2$: $u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy$ "Differentialform"

kann dies als totales Differential $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ geschrieben werden?

~~6507 - 88 824~~