$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$

$\Rightarrow F_{xy} = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z$

$F_{yz} = -B_x \;,\quad F_{zx} = -B_y$ (zyklische Vertauschung)

$F_{tx} = \partial_t A_x + \partial_x \phi = -E_x$

da $\nabla_i = -\partial_i$ für einen räumlichen Index i

$F_{ty} = -E_y \;,\quad F_{tz} = -E_z$

zusammenfassend:

$$F_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} B_k \qquad F_{0i} = -E_i$$

also

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_z & B_y \\ E_2 & B_z & 0 & -B_x \\ E_3 & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lorentztransformation des Magnetfeldes $\tilde{B}$ für $\tilde{v} = v\tilde{e}_x$

$B_x' = F_{zy}' = F_{zy} = B_x$

y und z-Komponenten sind Lorentz-invariant

$B_y' = F_{xz}' = \gamma(F_{xz} - vF_{tz}) = \gamma(B_y + v_x E_z)$

nur x-Komponente transformiert

$B_z' = F_{yx}' = \gamma(F_{yx} - vF_{yt}) = \gamma(B_z - v_x E_y)$

In Kurzschreibweise:

$$\vec{B}' = \vec{B}_{\parallel} + \gamma(\vec{B} - \vec{v} \times \vec{E})_{\perp}$$

in x- also $\vec{v}$-Richtung   senkrecht zur x- also $\vec{v}$-Richtung

Ähnlich für Lorentztransformation des elektrischen Feldes $\vec{E}$:

beide Komponenten transformieren!

$$E_x' = F_{xt}' = \gamma^2(F_{xt} - v F_{xx} - v F_{tt} + v^2 F_{tx})$$

$$= \gamma^2 F_{xt}(1-v^2) = F_{xt} = E_x$$

$$E_y' = F_{yt}' = \gamma(F_{yt} - v F_{yx}) = \gamma(E_y - v_x B_z)$$

$$E_z' = F_{zt}' = \gamma(F_{zt} - v F_{zx}) = \gamma(E_z + v_x B_y)$$

In Kurzschreibweise:

$$\vec{E}' = \vec{E}_{\parallel} + \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})_{\perp}$$

insbesondere: nur Komponenten $\perp$ zu $\vec{v}$ transformieren!

Check des Anwendungsbeispiels Testladung + Leiter in relativer Bewegung:

In S (Leiter in Ruhe): $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_x}{2\pi r} \vec{e}_z$, $\vec{E} = 0$

In S' (Ladung in Ruhe): $\vec{E}' = -\frac{v \mu_0 I_x}{2\pi r} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \vec{e}_y$

Gemäß der allgemeinen Transformation sollte

$$\breve{E}' = \breve{E}_{\parallel} + \gamma(\underbrace{\breve{E}}_{\breve{E}=0} + \breve{v} \times \breve{B})_{\perp} = \gamma v \breve{e}_x \times \breve{B} =$$

$$\underset{\breve{e}_x \times \breve{e}_z = -\breve{e}_y}{=} -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \frac{\mu_0 I_x}{2\pi r} \breve{e}_y \quad \checkmark$$

5.4. Bewegungsgleichungen in relativistischer Schreibweise

$$p_\sigma = m_0 \frac{dx_\sigma}{d\tau} = m_0 u_\sigma \qquad [u_\sigma = \gamma(1, \breve{v})]$$

$$\Rightarrow \text{Viererkraft} \quad f_\sigma = \frac{dp_\sigma}{d\tau} = m_0 \frac{d^2 x_\sigma}{d\tau^2} = m_0 \underbrace{a_\sigma}_{\text{Viererbeschleunigung}}$$

$$f_\sigma = \overset{\text{Lorentzfaktor des bewegten Teilchens}}{\gamma} \frac{dp_\sigma}{dt} = \gamma\left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\breve{p}}{dt}\right) = \gamma(\underset{\text{Leistung}}{P}, \underset{\text{Kraft}}{\breve{F}}) = \gamma(\breve{F} \cdot \breve{v}, \breve{F})$$

In der Elektrodynamik $\breve{F} = q(\breve{E} + \breve{v} \times \breve{B})$

Es gilt dann für die Lorentzkraft:

$$f_\sigma = q \underbrace{u_\nu}_{\text{Vierergeschwindigkeit}} F_{\sigma\nu}$$

Beweis: $\sigma = 0$: $L.S. = \gamma \breve{F} \cdot \breve{v} = \gamma q \breve{E} \cdot \breve{v}$

$$R.S. \underset{F_{00}=0}{=} q \sum_{i=1}^{3} (-u_i F_{0i}) \underset{u_i = \gamma v_i,\ F_{0i} = -E_i}{=} q \gamma \breve{E} \cdot \breve{v}$$

$\mu = i$: $\quad L.S. = \gamma F_i = \gamma q\left[E_i + (\vec{v} \times \vec{B})_i\right]$

$$R.S. = q\left[u_0 F_{i0} - \sum_{j=1}^{3} u_j F_{ij}\right] =$$

$$= q\gamma\left[E_i - \sum_{j=1}^{3} v_j F_{ij}\right] = q\gamma\left[E_i + \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} v_j B_k\right]$$

$$= q\gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_i \quad \checkmark$$

Damit kann man die Transformationseigenschaften von $\vec{E}$ nochmal anders erhalten:

Sei Ladung q in S' in Ruhe d.h. $\vec{v} = 0$

$$\Rightarrow \quad f'_i \underset{\gamma = 1}{=} q E'_i \qquad \text{oder} \qquad \vec{f}' = q\vec{E}'$$

Da f^μ Vierervektor ist, folgt

Geschwindigkeit des Teilchens in S

$$\vec{f}' = \vec{f}_\perp + \gamma\left(\vec{f}_\parallel - v\vec{e}_x f_0\right) =$$

$$= \gamma q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_\perp + \gamma^2 q\left[\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_\parallel - \vec{v}\left(\vec{v} \cdot \vec{E}\right)\right]$$

$$f_0 = \gamma \vec{F} \cdot \vec{v} = \gamma q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$= \gamma q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_\perp + \gamma^2 q\left[\vec{E}_\parallel - v^2 \vec{E}_\parallel\right] =$$

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)_\parallel = 0$$

$$= \gamma q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_\perp + q\vec{E}_\parallel$$

Vergleiche mit $\vec{f}' = q\vec{E}'$ $\Rightarrow$ $\vec{E}' = \vec{E}_\parallel + \gamma\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)_\perp$