5.2. Vierervektorformalismus

Notation: Wir verwenden "natürliche" Einheiten $c_0 = 1$!

$$(t, \vec{x}) = (t, x, y, z)$$
$$(E, \vec{p}) = (E, p_x, p_y, p_z)$$
bilden Vierervektoren

Lorentz-transformation in x-Richtung:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) = \gamma(t - vx)$$
$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) = \gamma(x - vt)$$

Man schreibt Vierervektoren als x_σ, $\sigma = 0,1,2,3$, p_σ etc.
und $\sigma = i$ für räumliche Indizes (i.e. arabische Buchstaben)

$$p_\sigma = \underbrace{m_0}_{\text{Ruhemasse}} \underbrace{u_\sigma}_{\text{"Vierergeschwindigkeit"}}$$

$$\Rightarrow u_\sigma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(1, \vec{v}) = \gamma(1, \vec{v})$$

Man kann u_σ schreiben als

$$u_\sigma = \frac{dx_\sigma}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \frac{dx_\sigma}{dt}$$

$d\tau = \sqrt{1-v^2}\, dt$

↳ Geschwindigkeit des Teilchens

Skalarprodukt:

Seien a_σ, b_σ zwei Vierervektoren, dann ist

$$a_\sigma b_\sigma := a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$
$$= a_t b_t - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Lorentzinvariant. Insbesondere

$$t^2 - \vec{r}^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$
$$E^2 - \vec{p}^2 = \frac{m_0^2}{1-v^2}(1 - v^2) = m_0^2$$

Dies kann oft sehr nützlich sein.

Beispiel: Schwelle für die Pionproduktion

$$N + \gamma \to N + \pi$$

$$\text{z.B. } p + \gamma \to p + \pi^0$$

in der kosmischen Hintergrundstrahlung

$$\Rightarrow \underbrace{(p_\sigma}_{\text{proton}} + \underbrace{\varepsilon_\sigma)}_{\text{Photon}}^2 \underbrace{=}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}} (\overbrace{p'_\sigma}^{\text{proton nach Reaktion}} + \underbrace{p^\pi_\sigma}_{\text{pion}})^2$$

Im Massenzentrum ist Gesamtimpuls $\check{P}_{tot} = 0$

$$\Rightarrow (p'_\sigma + p^\pi_\sigma)^2 = (E' + E^\pi)^2 \geq (m_N + m_\pi)^2$$

Andererseits ist

$$p_\sigma = (E, \check{p}) \qquad \varepsilon_\sigma = (\epsilon, \check{\varepsilon})$$

$$(p_\sigma + \varepsilon_\sigma)^2 = (E + \epsilon)^2 - (\check{p} + \check{\varepsilon})^2$$

$$= \underbrace{E^2 + 2E\epsilon + \varepsilon^2 - \check{p}^2}_{E^2 - \check{p}^2 = m_N^2} - \varepsilon^2 - 2\check{p}\cdot\check{\varepsilon} =$$

$$2E\epsilon(1 - \underbrace{v_p}_{\text{Protengeschwindigkeit} \simeq 1} \underbrace{\cos\theta}_{\text{Winkel zwischen Proton und photon-Impuls}}) + m_N^2$$

Da $\cos\theta \geq -1$ ist die Schwelle bestimmt durch

$$4E\epsilon \geq (m_N + m_\pi)^2 - m_N^2 = 2m_N m_\pi + m_\pi^2$$

$$\Rightarrow E \gtrsim \frac{m_N m_\pi + m_\pi^2/2}{2\epsilon} \simeq 3.4\cdot 10^{19} \left(\frac{\epsilon}{10^{-3}\,\text{eV}}\right)^{-1} \text{eV}$$

typische CMB ~~Energie~~ ist $\simeq 6\cdot 10^{-4}$ eV

Dies ist der berühmte Greisen-Zatsepin-Kuzmin (GZK) Effekt

Spielt in der Physik der kosmischen Höhenstrahlung eine wichtige Rolle

Vierdimensionale Gradient:

Sei $\phi = \phi(t,x)$; Im System S betrachten wir kleine Zeitveränderung Δt

$$\Rightarrow \Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\Delta x' + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\Delta t'$$

$$\underset{\Delta x = 0}{\Delta x' = -\gamma v \Delta t} \qquad \underset{\Delta x = 0}{\Delta t' = \gamma \Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\gamma\Delta t$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} = \gamma\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)$$

analog:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \gamma\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'} - v\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right)$$

Vergleiche mit

$$t = \gamma(t' + vx') \qquad x = \gamma(x' + vt')$$

$$\Rightarrow \quad \nabla_\sigma := \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\breve{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

bildet einen Vierervektor. Vorsicht auf das Minuszeichen der räumlichen Komponenten $\underset{0}{\nabla}$

$$\Rightarrow \nabla_\sigma a_\sigma = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \underset{\underset{0}{\nabla}}{\underset{\downarrow}{\breve{\nabla}}} \cdot \breve{a}$$

Beispiele:

1.) Die Kontinuitätsgleichung kann geschrieben werden als

$$0 = \frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \breve{\nabla}\cdot\breve{j} = \nabla_\sigma j_\sigma \quad \text{mit } j_\sigma = (\rho_e, \breve{j})$$

2.) Wellenoperator

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \breve{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \Box = \nabla_\sigma\nabla_\sigma$$

3. Lorentzeichung:

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla_\sigma A_\sigma \qquad \text{mit} \quad A_\sigma = (\phi, \vec{A})$$

4. Die Maxwell'schen Gleichungen für die Potentiale in Lorentz-Eichung

$$\Box A_\sigma = \frac{j_\sigma}{\varepsilon_0}$$

5.3. Lorentztransformation der Feldstärken

Definiere $F_{\sigma\nu} := \nabla_\sigma A_\nu - \nabla_\nu A_\sigma$

ist anti-symmetrischer Lorentz-Tensor, d.h. $F_{\sigma\nu} = -F_{\nu\sigma}$
Jeder einzelne Index transformiert wie ein Lorentz-Vektor, d.h. wenn für Lorentztransformation $S \to S'$

$$a'_\sigma = \cancel{L_{\sigma\nu}\, a_\nu} \; L_\sigma{}^\nu a_\nu \qquad \text{(Summation über Indexpaare)}$$

dann ist

$$F'_{\sigma\nu} = L_\sigma{}^\alpha L_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{3} L_\sigma{}^\alpha L_\nu{}^\beta F_{\alpha\beta}$$

z.B. für Lorentztransformation mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$:

$$L_\sigma{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorentztransformation von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ erhält man also, indem man $F_{\sigma\nu}$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ausdrückt.

Beachte: Maxwell'sche Gleichungen für $F_{\sigma\nu}$: $(\nabla_\sigma \nabla_\nu = \nabla_\nu \nabla_\sigma)$

$$\nabla_\sigma F_{\sigma\nu} = \nabla_\sigma \nabla_\sigma A_\nu - \nabla_\nu (\underbrace{\nabla_\sigma A_\sigma}_{=0}) = \Box A_\nu = \frac{j_\nu}{\varepsilon_0}$$