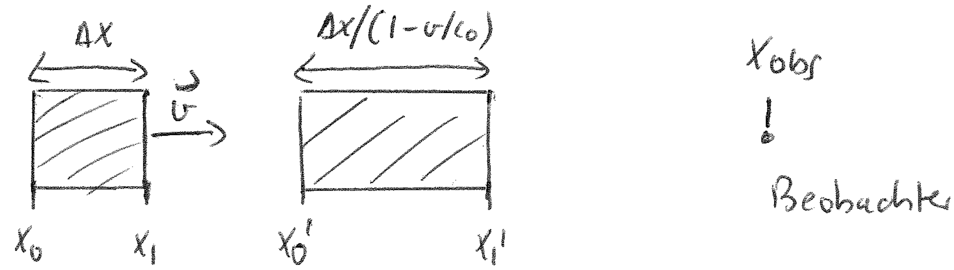
Veranschaulichung der Liénard-Wiechert-Potentiale für eindimensionale Bewegung:



$x_0 = vt \quad , \quad x_1 = vt + \Delta x$ → wahre Position von Vorder- und Hinterende

$x_0' = v\left(t - (x_{obs} - x_0')/c_0\right)$

$x_1' = \Delta x + v\left(t - (x_{obs} - x_1')/c_0\right)$

$\Rightarrow \quad x_0'(1 - v/c_0) = v(t - x_{obs}/c_0)$ → retardierte Position von Vorder- und Hinterende

$x_1'(1 - v/c_0) = \Delta x + v(t - x_{obs}/c_0)$

$\Rightarrow \quad x_1' - x_0' = \dfrac{\Delta x}{1 - v/c_0}$

⇒ Länge der Ladungswolke erscheint größer wenn sie sich auf den Beobachter zubewegt

⇒ Potentiale um Faktor $\dfrac{1}{1 - v/c_0}$ vergrößert

5. Elektrodynamik und Relativitätstheorie

5.1. Lorentztransformation von Ladungen und Strömen

Ladung ist ein "Lorentz-Skalar", d.h. unabhängig von der Geschwindigkeit des geladenen Teilchens!
Ansonsten wäre z.B. die Ladung eines elektrischen Leiters ~~nicht~~ temperaturabhängig, da sich Elektronen schneller bewegen als Atomkerne

Sei ρ_0 Dichte von ruhenden Ladungen

$\Rightarrow \quad \rho_e = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$ im bewegten System, da Länge parallel zur Bewegung Lorentz-kontrahiert, $L = L_0\sqrt{1-v^2/c_0^2}$

$$\Rightarrow \quad \rho_e L A = \rho_0 L_0 A = Q$$

Fläche transversal zur Bewegung ist invariant unter Lorentztransformation

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v} = \frac{\rho_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$

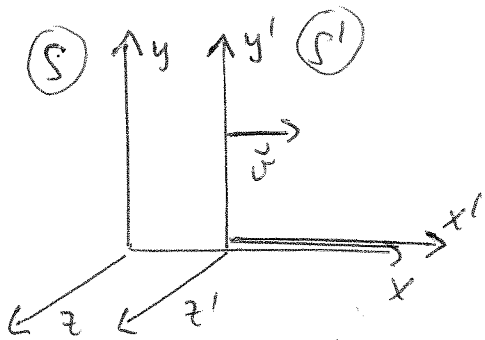
Dies ist vollkommen analog zu Energie und Impuls eines Teilchens mit Ruhemasse m_0 das sich mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt:

$$E = \frac{m_0 c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \qquad \vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$

$\Rightarrow$ Auch $(\rho_e, \vec{j})$ bilden einen "Vierervektor" welcher sich unter Lorentztransformation folgendermaßen verhält:

$$j_x' = \gamma(j_x - v\rho_e)$$
$$\rho_e' = \gamma(\rho_e - v j_x/c_0^2)$$
$$j_y' = j_y; \quad j_z' = j_z$$

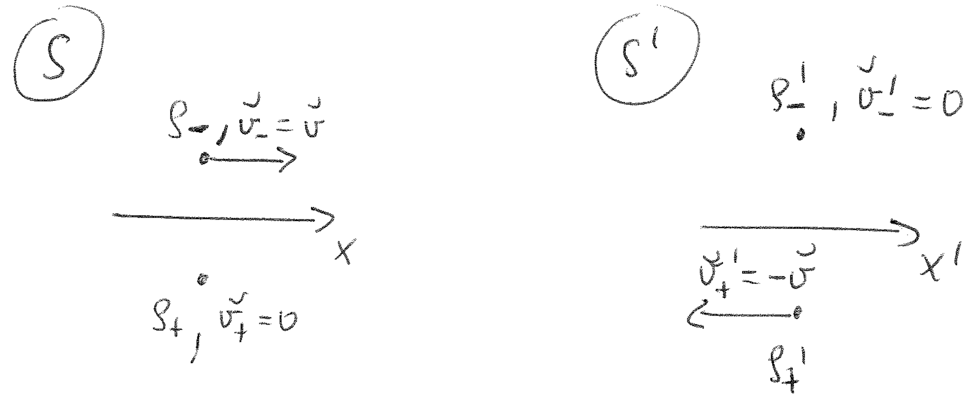
$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$
= "Lorentz-boost"



Beispiel / Demonstration

Leiter befinde sich in S in Ruhe und führe einen Strom $-I$ in x-Richtung. Positive Ladungen der Dichte ρ_+ befinden sich in Ruhe, negative Ladungen der Dichte $-\rho_+ = \rho_-$ bewegen sich mit Geschwindigkeit v in positive x-Richtung

System S' bewege sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v\vec{e}_x$ in positive x-Richtung, d.h. negative Ladungen ruhen, positive Ladungen bewegen sich mit Geschwindigkeit v in negative x-Richtung:



$$\Rightarrow \quad \rho_- = \frac{\rho_-'}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \qquad\qquad j_x = +\rho_- v = -\rho_+ v$$

$$\rho_+' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \qquad\qquad j_x' = -\rho_+' v$$

$$\Rightarrow \quad \rho_e' = \rho_+' + \rho_-' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} + \rho_-\sqrt{1-v^2/c_0^2} = \rho_+ \frac{v^2/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$

$$j_x' = -\frac{\rho_+ v}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$

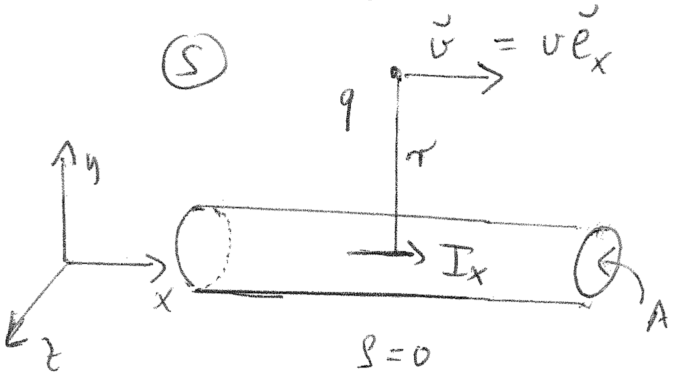
$$\Rightarrow \quad j_x' = \gamma j_x$$

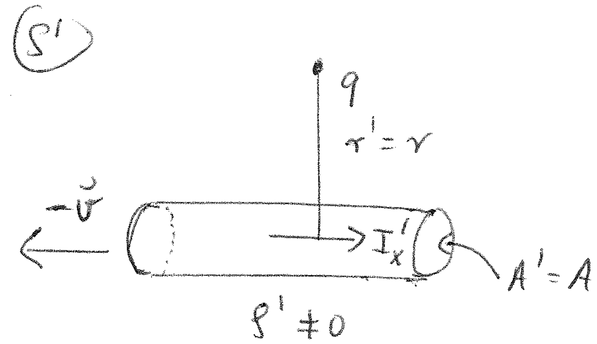
$$\rho_e' = -\gamma \frac{v^2}{c_0^2} j_x$$

genügt tatsächlich der Lorentztransformation da $\rho_e = \rho_+ + \rho_- = 0$

Beachte: Der bewegte Leiter ist nun <u>geladen</u>, $\rho_e' \neq 0$!

Anwendung: Kraft zwischen einem ruhenden Leiter und eine bewegten Ladung im Ruhesystem von Leiter und Ladung (S) bzw (S')





$$\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$\vec{E} = 0$, da $\rho = 0$

am Ort der Ladung ist ferner

$$\vec{B} = B_z \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_x}{2\pi r}\,\vec{e}_z \quad \text{(Biot-Savart)}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{q v \mu_0 I_x}{2\pi r}\,\vec{e}_x \times \vec{e}_z = $$

$$= -\frac{q v \mu_0 I_x}{2\pi r}\,\vec{e}_y$$

$$\vec{F}' = q\,(\vec{E}' + \vec{v}' \times \vec{B}') = q\vec{E}'$$

da $\vec{v}' = 0$ (Ladung in Ruhe)

$$\rho' = \frac{\rho - v j_x / c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \underset{\rho = 0}{=} -\frac{v j_x / c_0^2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

Gauß'sche Satz über ein Zylinderstück der Höhe h $\Rightarrow$

$$2\pi r h E_y' = \frac{\rho' h A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_y' = \frac{\rho' A}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{v \overbrace{j_x A}^{= I_x}}{2\pi\varepsilon_0 c_0^2 r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}' = -\frac{q v \mu_0 I_x}{2\pi r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}\,\vec{e}_y$$

$$\Rightarrow F_y' = \frac{F_y}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

Während eines Zeitintervalls Δt wird in System S der Impuls $\Delta p_y = F_y \Delta t$ übertragen. Im bewegten System ist wegen Zeitdilatation $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$ $\Rightarrow$ Im System S' ist der entsprechende Impulsübertrag

$$\Delta p_y' = F_y' \Delta t' = F_y \Delta t = \Delta p_y$$

Dies ist konsistent mit der Tatsache, daß $\Delta p = (\Delta E, \Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z) = (\Delta E, \Delta\vec{p})$ wie $(t, \vec{x})$ transformiert, so daß $\Delta p_y' = \Delta p_y$ sein muß!