Umformung mit bac – cab – Regel:

$$\vec{e}_r \times \left[\vec{e}_r \times \ddot{\vec{p}}(t_{ret})\right] = -\left[\ddot{\vec{p}}(t_{ret}) - \vec{e}_r\left(\vec{e}_r \cdot \ddot{\vec{p}}(t_{ret})\right)\right]$$

$$=: -\ddot{\vec{p}}_\perp(t_{ret})$$

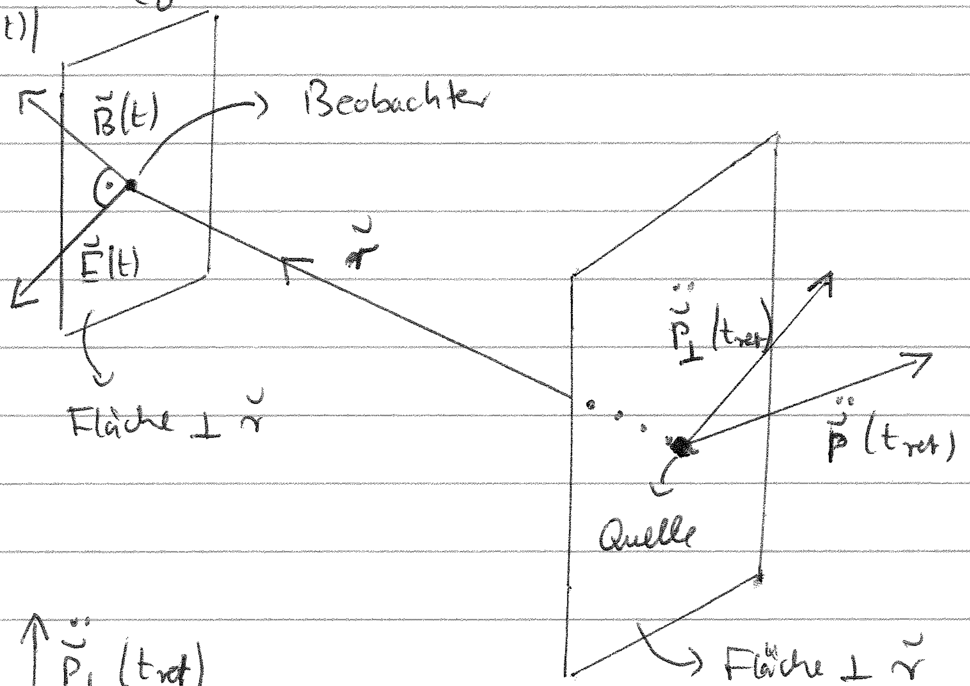
Komponente $\perp$ zur $\vec{r}$ - Richtung

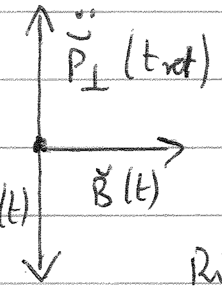
$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r}\,\ddot{\vec{p}}_\perp(\cancel{t_{ret}}\, r/c_0)$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c_0 r}\,\ddot{\vec{p}}_\perp(t - r/c_0) \times \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r},t) \perp \vec{B}(\vec{r},t) \perp \vec{r}$$

$$\frac{|\vec{E}(\vec{r},t)|}{|\vec{B}(\vec{r},t)|} = c_0$$





Richtung zur Quelle in die Zeichenebene hinein

4.3. Potentiale für bewegte Punktladungen: Liénard-Wiechert Potentiale

Weltlinie einer Punktladung q sei $\vec{\ell}(t)$

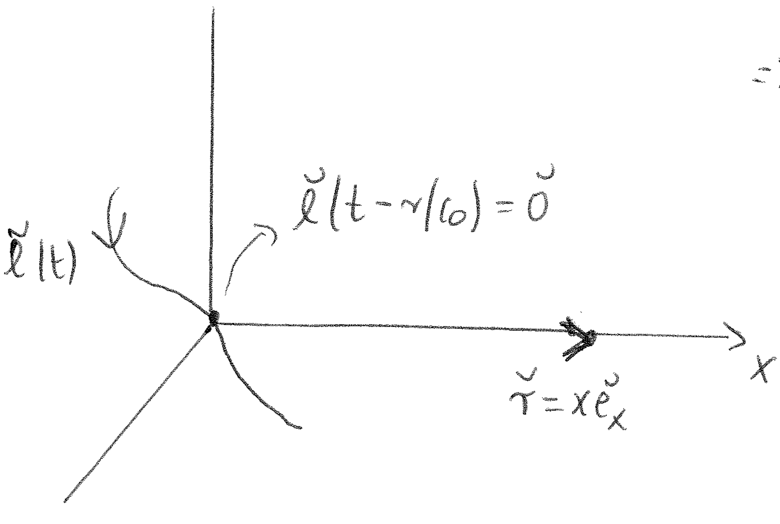
$$\Rightarrow \rho_e(\vec{r}\,',t) = q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{\ell}(t))$$

$$\vec{j}(\vec{r}\,',t) = \vec{v}(t)\,q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{\ell}(t)) = \dot{\vec{\ell}}(t)\,q\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{\ell}(t))$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\delta(\vec{r}\,' - \vec{\ell}(t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\int \frac{\vec{v}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0)\,\delta(\vec{r}\,' - \vec{\ell}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0))}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'$$

Zum Auswerten der Integrale über $\vec{r}\,'$ wähle Koordinatensystem so daß $\vec{r} = x\vec{e}_x$, $x>0$, und $\vec{\ell}(t-r/c_0) = \vec{\ell}(t-x/c_0) = \vec{0}$:



$$\Rightarrow |\vec{r}-\vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2 + y'^2 + z'^2}$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{r}\,' - \vec{\ell}(t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0)) =$$

$$= \delta\left(x' - \ell_x\left(t - \sqrt{(x-x')^2+y'^2+z'^2}/c_0\right)\right)\cdot\delta\left(y' - \ell_y\left(t - \sqrt{(x-x')^2+y'^2+z'^2}/c_0\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\,\delta\left(z' - \ell_z\left(t - \sqrt{(x-x')^2+y'^2+z'^2}/c_0\right)\right)$$

Beachte: Dies gibt eine implizite Gleichung für $\vec{r}\,'$, $t_{ret} = t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0$:

$$\vec{r}\,' = \vec{\ell}(t - |\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0)$$

Da per Annahme $\breve{l}(t-r/c_0)=\breve{0}$ wissen wir bereits daß die Nullstellen der Funktionen in den Deltafunktionen $(x', y', z')=\breve{0}$ sind

$$\Rightarrow \delta(\breve{r}' - \breve{l}(t-|\breve{r}-\breve{r}'|/c_0)) = \frac{\delta(x')}{|h_x'(x'=0)|} \frac{\delta(y')}{|h_y'(y'=0)|} \frac{\delta(z')}{|h_z'(z'=0)|}$$

mit $h_x(x') = x' - l_x(t-(x-x')/c_0)$

$$h_y(y') = y' - l_y(t-\sqrt{x^2+y'^2}/c_0)$$

$$h_z(z') = z' - l_z(t-\sqrt{x^2+z'^2}/c_0)$$

$$\Rightarrow |h_x'(x'=0)| = 1 - \frac{\dot{l}_x(t-r/c_0)}{c_0} = 1 - \frac{\breve{v}(t-r/c_0)\cdot\breve{r}}{c_0 r}$$

$$|h_y'(y'=0)| = 1 = |h_z'(z'=0)|$$ da $\frac{d}{dy'}\sqrt{x^2+y'^2}\Big|_{y'=0} = 0$

und analog für h_z'

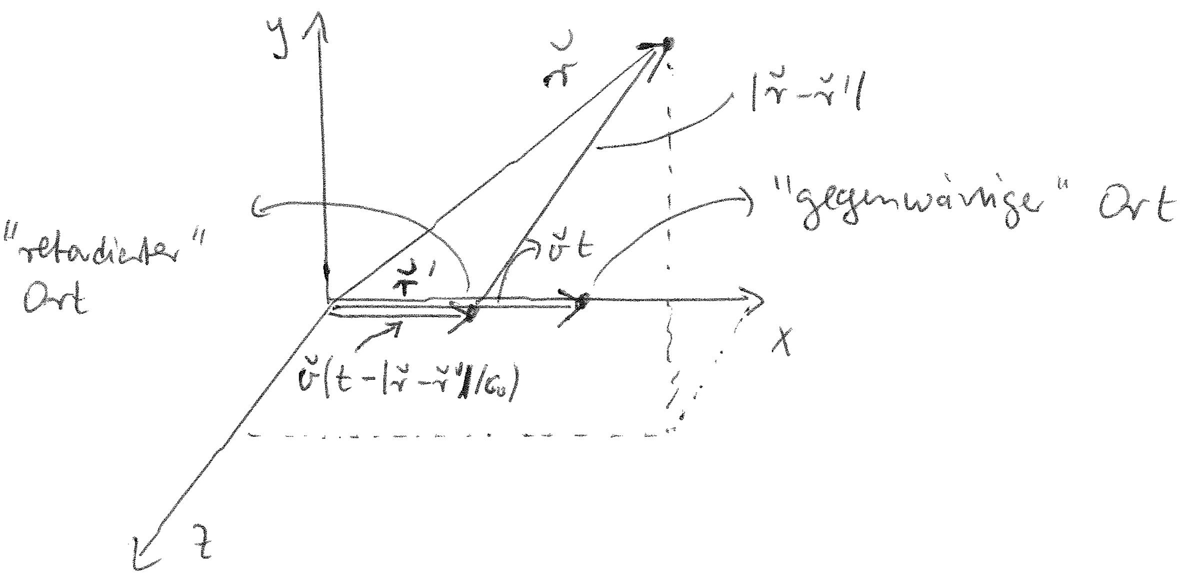
$$\Rightarrow \phi(\breve{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{1}{1-\frac{\breve{v}}{c_0}\cdot\breve{e}_r(t_{ret})} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{[r-\frac{\breve{v}}{c_0}\cdot\breve{r}](t_{ret})}$$

Dies gilt dann auch in beliebigen Koordinatensystemen, wenn $\breve{r}(t_{ret})$ als der Ortsvektor von der Ladung zum Aufpunkt (Beobachter) aufgefasst wird, genommen am retardierten Zeitpunkt.

Analog für das Vektorpotential

$$\breve{A}(\breve{r},t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\breve{v}(t_{ret})}{[r-\frac{\breve{v}}{c_0}\cdot\breve{r}](t_{ret})}$$

Anwendung: Spezialfall einer Ladung mit konstanter Geschwindigkeit entlang der x-Achse



$$t_{ret} = t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c_0 \qquad \vec{r}' = \vec{v}\, t_{ret} = v\, t_{ret}\, \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{r}'-\vec{r}| = \sqrt{(x - v t_{ret})^2 + y^2 + z^2}$$

$$\| \qquad c_0(t - t_{ret})$$

Dies kann explizit nach $\vec{r}'$, t_{ret} aufgelöst werden

Quadrieren $\Rightarrow$ $$c_0^2 (t - t_{ret})^2 = (x - v t_{ret})^2 + y^2 + z^2$$

$$\Rightarrow \quad t_{ret}^2 (c_0^2 - v^2) + t_{ret}(2xv - 2tc_0^2) + c_0^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_{ret} = \frac{1}{c_0^2 - v^2}\left(c_0^2 t - vx \pm \sqrt{(c_0^2 t - vx)^2 - (c_0^2 - v^2)(c_0^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c_0^2}\left(t - \frac{vx}{c_0^2} \pm \sqrt{\left(t - \frac{vx}{c_0^2}\right)^2 - \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)\left(t^2 - \frac{x^2+y^2+z^2}{c_0^2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c_0^2}\left(t - \frac{vx}{c_0^2} \pm \frac{1}{c_0}\sqrt{v^2 t^2 + x^2 - 2vxt + \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)(y^2 + z^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - v^2/c_0^2}\left(t - \frac{vx}{c_0^2} - \frac{1}{c_0}\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)(y^2 + z^2)}\right)$$

Kausalität erfordert negatives Vorzeichen

$$\Rightarrow \left[r - \frac{\vec{v}}{c_0}\cdot\vec{r}\right](t_{ret}) = \left[|\vec{r}-\vec{r}\,'| - \frac{\vec{v}}{c_0}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\right](t_{ret})$$

Vektor vom Ort der Ladung
zum retardierten Zeitpunkt
zum Beobachter

$$= c_0(t-t_{ret}) - \frac{v}{c_0}(x - v\,t_{ret}) =$$

$$= c_0\left(t - \frac{vx}{c_0^2} - \left(1-\frac{v^2}{c_0^2}\right)t_{ret}\right) = \sqrt{(x-vt)^2 + \left(1-\frac{v^2}{c_0^2}\right)(y^2+z^2)}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\,\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\right)^2 + y^2+z^2}}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\vec{v}}{c_0^2}\,\phi(\vec{r},t)$$

Beachte nun: Das Inertialsystem mit Koordinaten (x',y',z',t') in dem sich die Ladung in Ruhe befindet steht mit dem Beobachtersystem (x,y,z,t) in Beziehung über die Lorentztransformation

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\ ; \quad t' = \frac{t - vx/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\ ; \quad y'=y,\ z'=z$$

(siehe Physik I)

In diesem System hat man die Potentiale

$$\phi'(\vec{r}\,',t') = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r'} \qquad \vec{A}'(\vec{r}\,',t') = 0 \ \ (\text{da Strom} = 0)$$

[Vorsicht: $\vec{r}\,'$ ist verschieden von dem oben verwendeten $\vec{r}\,'$ im Ruhesystem des Beobachters; $\vec{r}\,' = (x',y',z')$]

Da $\breve{A}' = 0$, läßt sich damit schreiben

$$\phi(\breve{r},t) = \frac{\phi'(\breve{r}',t') + v\,A_x'(\breve{r}',t')}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\,\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}$$

$$A_x(\breve{r},t) = \frac{A_x'(\breve{r}',t') + v\,\phi'(\breve{r}',t')/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}$$

Dies entspricht <u>exakt</u> der umgekehrten Lorentztransformation der Koordinaten

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \;;\quad t = \frac{t'+v x'/c_0^2}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}} \;;\quad y = y',\; z = z'$$

$\Rightarrow \left(\frac{\phi}{c_0^2}, \breve{A}\right)$ bilden einen "Vierervektor" der an einem gegebenen Raumzeitpunkt $(t,x,y,z) \mathrel{\hat{=}} (t',x',y',z')$ genauso transformiert wie $(t,\breve{r}) = (t,x,y,z)$ selbst