Durch Bildung des negativen Gradienten von $\Delta \phi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ und der negativen Zeitableitung von $\Delta \vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$ erhält man

auch

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

4.1. Lösungen der Wellengleichung

Ebene Wellen im Vakuum:

$$\varphi_\pm(\vec{r},t) = \varphi_0\, e^{\pm i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi_\pm(\vec{r},t) = -k^2 \varphi_\pm(\vec{r},t) \qquad \text{da } \frac{\partial^2 \varphi_\pm(\vec{r},t)}{\partial x^2} = -k_x^2 \varphi_\pm(\vec{r},t) \text{ etc}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial t^2}(\vec{r},t) = -\omega^2 \varphi_\pm(\vec{r},t)$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi_\pm - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 \varphi_\pm}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{wenn } \omega = k c_0$$

"Dispersionsrelation"

Diese Wellen breiten sich entlang der Richtung $\vec{k}$ aus:
Phase $\alpha(t) = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const.}$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = 0 = \omega - \vec{k}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{k}\, c_0 = \frac{\vec{k}}{k} c_0$$

Alternative (reelle) Lösungen:

$$\varphi_{1,2}(\vec{r},t) = \varphi_0 \begin{cases} \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \\ \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \end{cases}$$

Auch

$$\varphi_\pm(\vec r, t) = f(\omega t - \vec k \cdot \vec r)$$

sind Lösungen der freien Wellengleichung für beliebige, differenzierbare Funktionen f

Wir zeigen nun daß

$$\varphi(\vec r, t) = \frac{s(t - r/c_0)}{4\pi r}$$

"retardierte" Lösung zum Zeitpunkt t hängt von Quelle zur Zeit $t - r/c_0$ ab, da Signale sich nur mit c_0 ausbreiten

Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = - s(t)\,\delta(\vec r)$$

mit einer Quelle der (i.a. zeitabhängigen) Stärke $s(t)$ am Ursprung ist.

Beweis:

$$\Delta\varphi = - s(t)\,\delta(\vec r) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}_{\text{für } r>0}$$

$$= - s(t)\,\delta(\vec r) + \frac{1}{4\pi r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[- s(t - r/c_0) - \frac{r}{c_0}\dot s(t - r/c_0)\right]$$

$$= - s(t)\,\delta(\vec r) + \frac{1}{4\pi r^2}\left[\frac{1}{c_0}\dot s(t - r/c_0) - \frac{1}{c_0}\dot s(t - r/c_0) + \frac{r}{c_0^2}\ddot s(t - r/c_0)\right]$$

$$= - s(t)\,\delta(\vec r) + \frac{\ddot s(t - r/c_0)}{4\pi c_0^2 r}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\ddot s(t - r/c_0)}{4\pi r}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = - s(t)\,\delta(\vec r) \qquad \checkmark$$

Beachte daß man im Koeffizienten $s(t-r/c_0)$ von $\delta(\vec{r})$ $r=0$ setzen kann und daß alle anderen Terme für $r\to 0$ höchstens wie $\frac{1}{r^2}$ divergieren so daß für eine Testfunktion $g(\vec{r})$

$$\int_{r\leq R} g(\vec{r})\frac{1}{r^2}\,d^3\vec{r} \;\Rightarrow\; g(0)\,4\pi R \to 0 \quad \text{für } R\to 0$$

was vernachlässigbar gegen

$$\int_{r\leq R} g(\vec{r})\,\delta(\vec{r})\,d^3\vec{r} = g(0)$$

ist.

Damit haben wir nun durch Superposition eine Lösung der allgemeinen inhomogenen Wellenfunktion

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -s(\vec{r},t)$$

$$\psi(\vec{r},t) = \int \frac{s(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'$$

da $s(\vec{r},t) = \int s(\vec{r}\,',t)\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,d^3\vec{r}\,'$

Damit sind für beliebige Quellen $\rho_e(\vec{r},t)$, $\vec{j}(\vec{r},t)$

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho_e(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'$$

retardierte Lösungen !

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mu_0 \int \frac{\vec{j}(\vec{r}\,',t-|\vec{r}-\vec{r}\,'|/c_0)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,'$$

Lösungen für die Potentiale ϕ, $\vec{A}$. Sie genügen darüberhinaus der Eichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$$

denn

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \vec{\nabla}_{\vec{r}'}\cdot\left(\frac{\vec{j}(\vec{r}', t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) d^3\vec{r}'$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})(\vec{r}', t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3\vec{r}'$$

da $\vec{\nabla}_{\vec{r}} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}'}$ wenn auf $|\vec{r}-\vec{r}'|$ angewandt und da $\vec{\nabla}_{\vec{r}}$ nicht auf das Ortsargument von $\vec{j}(\vec{r}',t)$ wirkt.

Der erste Term ist ein Oberflächenintegral im Unendlichen und verschwindet für lokalisierte Ströme.

Damit gilt:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c_0^2}\int\frac{(\vec{\nabla}\cdot\vec{j})(\vec{r}', t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c_0) + \frac{\partial\rho_e}{\partial t}(\vec{r}', t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3\vec{r}'$$

$=0$ wegen der Kontinuitätsgleichung

Aus den retardierten Lösungen für die Potentiale erhalten wir die Feldstärken $\vec{E}, \vec{B}$ mit Hilfe von

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}}\,|\vec{r}-\vec{r}'| = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$B_x(\vec{r}) = (\vec{\nabla}\times\vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{j_z(\vec{r}', t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{j_y(\vec{r}', t-|\vec{r}-\vec{r}'|/c_0)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right] d^3\vec{r}'$$

$=$

Differentiation wirkt auf die beiden $|\vec{r}-\vec{r}'|$-Terme