3.5.3. Variationsprinzipien

Eine Lösung der Poissongleichung

$$\Delta\phi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

minimiert die Gesamtenergie

$$U[\phi] := \frac{\varepsilon_0}{2}\int(\vec{\nabla}\phi)^2\, d^3\vec{r} - \int\rho_e\,\phi\, d^3\vec{r}$$

ist Funktional von ϕ

Beweis: Sei $\Delta\phi_0 = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$. Betrachte eine kleine Abweichung von ϕ_0!

$$\phi(\vec{r}) = \phi_0(\vec{r}) + \delta\phi(\vec{r})$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla}\phi)^2 = (\vec{\nabla}\phi_0)^2 + 2(\vec{\nabla}\phi_0)\cdot(\vec{\nabla}\delta\phi) + (\vec{\nabla}\delta\phi)^2$$

$$\rho_e\phi = \rho_e\phi_0 + \rho_e\,\delta\phi$$

In erster Ordnung in $\delta\phi$ ändert sich $U[\phi]$ darum um

$$\delta U \simeq \varepsilon_0\int_V(\vec{\nabla}\phi_0)\cdot(\vec{\nabla}\delta\phi)\, d^3\vec{r} - \int_V\rho_e\,\delta\phi\, d^3\vec{r}$$

$$= \varepsilon_0\int_V\left[\vec{\nabla}\cdot(\delta\phi\,\vec{\nabla}\phi_0) - \delta\phi\,\Delta\phi_0\right] d^3\vec{r} - \int\rho_e\,\delta\phi\, d^3\vec{r}$$

$$\underset{\substack{\text{Satz von Gauß} \\ \text{für 1. Term}}}{=} \underbrace{\varepsilon_0\int_{\partial V}\delta\phi\,(\vec{\nabla}\phi_0)\cdot d\vec{F}}_{\substack{=0 \text{ wenn } \delta\phi = 0 \\ \text{auf dem Rand}}} - \int_V(\varepsilon_0\Delta\phi_0 + \rho_e)\,\delta\phi\, d^3\vec{r}$$

$$\Rightarrow \delta U = 0 \quad \forall \text{ Variationen } \delta\phi \iff \Delta\phi_0 = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

Dieses sehr allgemeine Prinzip kann numerisch angewandt werden: Sei $\phi(\vec{r})$ eine lineare Interpolation von n Werten ϕ_i, $1 \le i \le n$, von $\phi(\vec{r})$ an n diskreten Stellen $\vec{r}_i$ im Inneren des Volumens V:

$$\phi(\breve{r}) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, N_i(\breve{r})$$

wobei $N_i(\breve{r})$ bekannte Interpolationsfunktionen sind, die von der spezifischen Interpolationsmethode abhängen
(z.B. Interpolation im Inneren von Dreiecken)

I.a. ist $N_i(\breve{r}) \neq 0$ nur in einer Umgebung von $\breve{r}_i$, die an die benachbarten $\breve{r}_j$ grenzt.

$U[\phi]$ wird dann eine quadratische Funktion der ϕ_i:

$$U[\phi] = \sum_{i,j=1}^{n} M_{ij} \, \phi_i \phi_j + \sum_{i=1}^{n} K_i \, \phi_i$$

wobei M_{ij}, K_i aus den $N_i(\breve{r})$ analytisch berechnet werden können und M_{ij} ist eine "dünn besetzte" Matrix

$$0 = \frac{\partial U[\phi]}{\partial \phi_i} = 2 \sum_{j=1}^{n} M_{ij} \, \phi_j + K_i \qquad i = 1, \dots, n$$

ergibt dann ein lineares Gleichungssystem für die ϕ_i das. i.a. leicht gelöst werden kann.

$\rightarrow$ "Methode der endlichen Elemente", "finite Elemente"

Beispiel: 2D: (siehe 3.5.2)

$$x_i = x_0 + ih \qquad y_j = y_0 + jh \qquad 0 \le i,j \le n$$

also $x_0 \le x \le x_0 + nh$, $y_0 \le y \le y_0 + nh$

$$\phi(x,y) = \phi_{i,j} + (x - x_i)\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h} + \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h}(y - y_j)$$

für $x_i \le x \le x_{i+1}$, $y_j \le y \le y_{j+1}$

$$\Rightarrow U[\phi] = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_{i,j=0}^{n-1} \left[(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j})^2 + (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j})^2 \right]$$

$$- h^2 \sum_{i,j=0}^{n-1} \tilde{\varrho}_{i,j} \, \phi_{i,j}$$

da $\quad \vec{\nabla}\phi(x,y) = \left(\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{h} , \frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}}{h} \right) = \text{const.}$

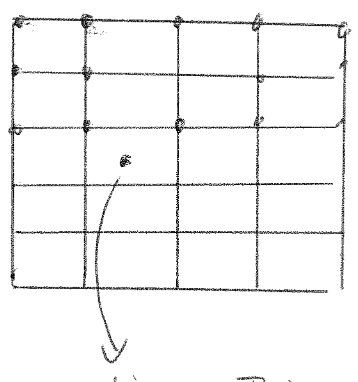
für $\quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad , \quad y_j \leq y \leq y_{j+1}$

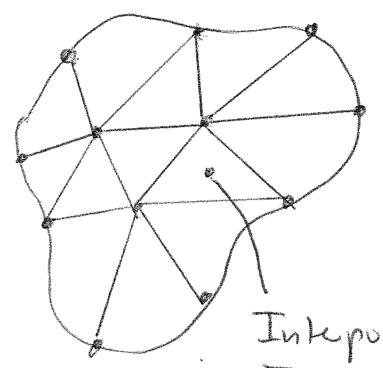
und die Fläche einer "Plakette" ist h^2

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial U[\phi]}{\partial \phi_{i,j}} = 4\phi_{i,j} - \phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j} - \phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1} - h^2 \tilde{\rho}_{i,j}$$

$\Rightarrow$ dies führt zu derselben Gleichung wie in 3.5.2. für die auf einem quadratischen Gitter diskretisierte Differentialgleichung

Die "finite element" Methode ist aber viel allgemeiner und läßt sich auch auf komplizierte, ungleichmäßig diskretisierte Flächen und Volumina anwenden:





Die "finite element" Methode findet in den Ingenieurswissenschaften Anwendung

4. Zeitabhängige Maxwellgleichungen – elektromagnetische Wellen

Betrachte nun volle Maxwellgleichungen inklusive Zeitableitungen

Ansatz (wie zuvor):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Induktionsgleichung

$$\Rightarrow \exists \text{ Skalares Potential mit } \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

Konvention

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Physikalische Felder $\vec{E}, \vec{B}$ sind invariant unter den „Eichtransformationen"

$$\vec{A} \to \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \; ; \; \phi \to \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

für beliebige Skalarfunktion ψ

Gauß'sches Gesetz für $\vec{E}$ $\Rightarrow$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = + \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \quad \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \qquad (*)$$

Ampère'sches Gesetz $c_0^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \quad c_0^2 \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad -c_0^2 \Delta \vec{A} + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(c_0^2 \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0} \qquad (**)$$

Angenommen wir können eine Eichung wählen in der

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{(Lorentz-Eichung)}$$

dann entkoppeln (*) und (**):

$$\Delta\phi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}$$

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}$$

Dies sind "Wellengleichungen" mit den Quellen $\rho_e, \vec{j}$

Angenommen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} \neq 0$$

Mit eine "Umeichung" $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi$, $\varphi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \Delta\psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

Also ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0$ wenn ψ so gewählt daß

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}$$

Dies sind alles Wellengleichungen der Form

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -s(\vec{r}, t)$$

Für Wellen im Vakuum, $s=0$ hat man

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Im Vakuum genügen auch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ der homogenen Wellengleichung:

$$0 = \vec{\nabla}\times\left(\Delta\vec{A} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right) = \Delta(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \Delta\vec{B} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$