

3.5.2. Höher-dimensionale Poisson-Gleichung

$$2D: \quad \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -g(x, y)$$

Diskretisierung: $x_i = x_0 + ih_x$ $i = 0, 1, \dots, n$
 $y_j = y_0 + jh_y$ $j = 0, 1, \dots, m$

$$\phi_{i,j} = \phi(x_i, y_j) \quad g_{i,j} = g(x_i, y_j)$$

$$\Rightarrow (\Delta \phi)(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h_x^2} (\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j}) + \frac{1}{h_y^2} (\phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j}) \\ \approx -g_{i,j}$$

$\Rightarrow$ Iterationsgleichung, falls $h = h_x = h_y$:

$$\phi_{i,j}^{(v+1)} = \frac{1}{4} \left(\phi_{i+1,j}^{(v)} + \phi_{i-1,j}^{(v)} + \phi_{i,j+1}^{(v)} + \phi_{i,j-1}^{(v)} + h^2 g_{i,j} \right)$$

$$3D: \quad z_k = z_0 + kh \quad , \quad h_x = h_y = h_z = h \quad j \quad \phi_{i,j,k} = \phi(x_i, y_j, z_k)$$

$$\Rightarrow (\Delta \phi)(x_i, y_j, z_k) \approx \frac{1}{h^2} \left[\phi_{i+1,j,k} + \phi_{i-1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j-1,k} \right. \\ \left. + \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k-1} - 6\phi_{i,j,k} \right]$$

Numerische Beispiele

1.) $n=m=30$, $h_x = h_y = 1$, homogene 2D-Poisson-Gleichung
d.h. $g=0$; $x_i = i$, $y_j = j$; $0 \leq i, j \leq 30$

Randbedingungen

$$\phi(0, y) = \phi(x, 0) = 0$$

$$\phi(30, y) = \phi(x, 30) = 32$$

d.h. diskretisiert

$$\phi_{0,j} = \phi_{i,0} = 0 \quad \text{für } 0 \leq i, j < 30$$

$$\phi_{30,j} = \phi_{i,30} = 32 \quad \text{für } 0 \leq i, j < 30$$

$$\phi_{i,j}^{(v+1)} = \frac{1}{4} \left(\phi_{i+1,j}^{(v)} + \phi_{i-1,j}^{(v)} + \phi_{i,j+1}^{(v)} + \phi_{i,j-1}^{(v)} + h^2 g_{i,j} \right)$$

Iterationen: 10, 100, 1000, 10000

nach 10^3 Iterationen praktisch konvergiert

2.) wie 1.) aber zusätzlicher Quellenterm:

$$g(x,y) = e^{-\left[\left(x - x_{\max}/2\right)^2 + \left(y - y_{\max}/2\right)^2\right] / 10^2}$$

$$g_{i,j} = g(x_i, y_j)$$

d.h. Gauß'sche Funktion mit Peak im Zentrum des Quadrats
und Breite 10.