3.4. Poissongleichung in der Magnetostatik

Wie in 3.1 diskutiert lässt sich das Ampèresche Gesetz

$$c_0^2 \breve{\nabla} \times \breve{B} = \frac{\breve{j}}{\varepsilon_0}$$

mit Hilfe des Vektorpotentials $\breve{A}$, $\breve{B} = \breve{\nabla} \times \breve{A}$, in der Eichung $\breve{\nabla} \cdot \breve{A} = 0$ ausdrücken als

$$\Delta \breve{A} = -\mu_0 \breve{j} \qquad \left(\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c_0^2}\right)$$

In Analogie zur Elektrostatik ist

$$\breve{A}(\breve{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\breve{j}(\breve{r}')}{|\breve{r} - \breve{r}'|} d^3\breve{r}'$$

eine Lösung. Sie erfüllt tatsächlich die Coulomb-Eichung $\breve{\nabla} \cdot \breve{A} = 0$:

$$\partial_i A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}(\breve{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int j_i(\breve{r}') \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\breve{r} - \breve{r}'|}\right) d^3\breve{r}' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int j_i(\breve{r}') \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{|\breve{r} - \breve{r}'|}\right) d^3\breve{r}' =$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{j_i(\breve{r}')}{|\breve{r} - \breve{r}'|}\right) d^3\breve{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\partial j_i}{\partial x_i'}(\breve{r}') \frac{1}{|\breve{r} - \breve{r}'|} d^3\breve{r}'$$

$$\Rightarrow \breve{\nabla} \cdot \breve{A} = \sum_i \partial_i A_i = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \breve{\nabla} \cdot \left(\frac{\breve{j}(\breve{r}')}{|\breve{r} - \breve{r}'|}\right) d^3\breve{r}' + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\breve{\nabla} \cdot \breve{j}'}{|\breve{r} - \breve{r}'|} d^3\breve{r}'}_{=0}$$

$=0$ da $\breve{\nabla} \cdot \breve{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$ aufgrund der Kontinuitätsgleichung und der statischen Situation

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß'sche Satz}}}{=} -\frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\int_{\partial V} \frac{\breve{j}(\breve{r}')}{|\breve{r} - \breve{r}'|} \cdot d\breve{F}}_{=0 \text{ für lokalisierte Ströme}} = 0$$

Daraus folgt das Gesetz von Biot-Savart:

$$\vec{B}(\vec{r}) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})(\vec{r})$$

$$\Rightarrow B_x(\vec{r}) = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[j_z(\vec{r}\,') \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - j_y(\vec{r}\,') \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right]$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[j_z(\vec{r}\,') \frac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} - j_y(\vec{r}\,') \frac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \right] d^3\vec{r}\,'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \right]_x d^3\vec{r}\,'$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{j}(\vec{r}\,') \times \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d^3\vec{r}\,'$$

Falls die Ströme entlang ein-dimensionalen Wegen (Drähten) lokalisiert sind, ist $\vec{j}(\vec{r}\,') d^3\vec{r}\,' \rightarrow I d\vec{s}$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{r}-\vec{r}\,') \times d\vec{s}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

3.5. Numerische Lösungsmethoden der Poissongleichung

3.5.1. Eindimensionale Poissongleichung

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \phi''(x) = -\frac{\rho_e(x)}{\varepsilon_0} =: -g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \phi''(x) = -g(x) \qquad \text{in einem Intervall} \quad a \le x \le b \quad (*)$$

Randbedingungen:

$$\phi(a) = A \quad ; \quad \phi(b) = B$$

Zweimalige Integration von $(*)$ gibt analytische Lösung

$$\phi(x) = -\int_a^x \int_a^{x'} g(x'')\,dx''\,dx' + h(x-a) + A$$

$$\phi(a) = A$$

$$\phi(b) = -\int_a^b \int_a^{x'} g(x'')\,dx''\,dx' + h(b-a) + A$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{1}{b-a}\left[B - A + \int_a^b \int_a^{x'} g(x'')\,dx''\,dx'\right]$$

"Diskretisierung" des Intervalls $[a,b]$:

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \qquad i = 0, 1, \ldots, n \quad ; \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

Sei $\phi_i := \phi(x_i)$; $g_i := g(x_i)$. Wir wollen die diskreten ϕ_i im Rahmen einer numerischen Lösung finden. Dazu benötigt man eine Diskretisierung der zweiten Ableitung:

$$\phi'\left(x_i + \frac{h}{2}\right) \simeq \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{h} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

→ "Gitterkonstante"

$$\phi'\left(x_i - \frac{h}{2}\right) \simeq \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{h} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \phi''(x_i) \approx \frac{\phi'(x_i + h/2) - \phi'(x_i - h/2)}{h}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} - \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i\right)$$

Einsetzen in $(*)$:

$$2\phi_i - \phi_{i+1} - \phi_{i-1} = h^2 g_i \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

Mit $\phi_0 = A$, $\phi_n = B$ und g_i, $1 \leq i \leq n-1$ gegeben kann man das als lineare Gleichung schreiben:

$$M \breve{\phi} = h^2 \breve{g}$$

mit $\breve{\phi} = (\phi_1, .., \phi_{n-1})^T$, $\breve{g} = (g_1, .., g_{n-1})^T$, die sich i.a. nach $\breve{\phi}$ auflösen läßt. Für großen n und insbesondere in mehr als einer Dimension ist M aber eine sehr hochdimensionale Matrix $\rightarrow$ schwer zu invertieren.

In der Praxis verwendet man dann Iterationsmethoden:

$$\phi_i = \frac{1}{2}\left(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} + h^2 g_i\right) \qquad (**)$$

Gegeben sei ein Näherungsansatz:

$$\phi_0^{(0)} = A,\ \phi_1^{(0)},\ ..,\ \phi_{n-1}^{(0)},\ \phi_n^{(0)} = B$$

$$\phi_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{2}\left(\phi_{i+1}^{(\nu)} + \phi_{i-1}^{(\nu)} + h^2 g_i\right) \qquad 1 \leq i \leq n-1 \ ; \ \nu \geq 0$$

Es existieren viele Variationen des Iterationsverfahrens:

z.B.: $$\phi_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{2}\left(\phi_{i+1}^{(\nu)} + \underbrace{\phi_{i-1}^{(\nu+1)}}_{\nabla_0} + h^2 g_i\right) \qquad i = 1, .., n-1$$

"Von unten nach oben"

oder $$\phi_i^{(\nu+1)} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\phi_{i+1}^{(\nu+1)}}_{\nabla_0} + \phi_{i-1}^{(\nu)} + h^2 g_i\right) \qquad i = n-1, n-2, .., 1$$

"Von oben nach unten"

(speicher-effizient auf einem Computer)

$\phi_i^{(\nu+1)}$ hängt nicht von $\phi_i^{(\nu)}$ ab!

Das ist nicht der Fall in "Relaxationsverfahren":

$$\phi_i^{(\nu+1)} = (1-\omega)\,\phi_i^{(\nu)} + \frac{\omega}{2}\left[\left(\phi_{i+1}^{(\nu)} + \phi_{i-1}^{(\nu)}\right) + h^2 g_i\right] \qquad 1 \le i \le n-1$$

$0 < \omega < 2$ "Relaxationsparameter"

$\omega = 1$ entspricht "gewöhnlichem" Iterationsverfahren.

Beachte, daß eine konvergierte Lösung tatsächlich Lösung der diskretisierten Poissongleichung (**) ist:

$$\phi_i = (1-\omega)\,\phi_i + \frac{\omega}{2}\left[\left(\phi_{i+1} + \phi_{i-1}\right) + h^2 g_i\right]$$

$$\Rightarrow \omega\left[\phi_i - \frac{1}{2}\left(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} + h^2 g_i\right)\right] = 0$$

Offene, hier nicht diskutierte Fragen:

- Bedingungen für Konvergenz?
- Abhängigkeit von erster Schätzlösung?
- geht eine konvergierte Lösung für $h \to 0$ tatsächlich gegen eine Lösung der Differentialgleichung?
- Geschwindigkeit der Konvergenz?