1. (10 Punkte) Heisenberg-Darstellung des Quanten-Oszillators

   Gegeben sei eine Kollektion unabhängiger harmonischer Quanten-Oszillatoren mit Vernichtern a_i und Energieabständen ϵ_i, welche durch den Hamiltonian

   $$H = \sum_i \epsilon_i a_i^\dagger a_i$$

   beschrieben werden. Berechnen Sie die Vernichter in Heisenberg-Darstellung,

   $$a_{iH}(t) = e^{iHt/\hbar} a_i e^{-iHt/\hbar} .$$

   Hinweis: Verwenden Sie entweder die Baker-Hausdorff Identität

   $$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots$$

   oder lösen Sie die Bewegungsgleichung für $\dot{a}_{iH}$ mit der Anfangsbedingung $a_{iH}(t = 0) = a_i$.

-

-

-

2. (15 Punkte) Einstein-Koeffizienten

Ein quantenmechanisches Zwei-Komponenten-System mit Energie-Niveaus E_1 und $E_2 > E_1$ koppele an die Mode eines Strahlungsfelds, deren Energie-Zustände durch den Quantenoszillator mit Energie $\hbar\omega = E_2 - E_1$ beschrieben werden. Der Hamiltonian des Gesamtsystems sei durch

$$H = H_2 + H_\mathrm{s} + H_\mathrm{int} = \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} + \left(\hbar\omega + \frac{1}{2}\right) a^\dagger a + f \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a + f^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a^\dagger ,$$

gegeben, mit f einer konstanten Zahl. Die ersten beiden Terme H_2 und H_s beschreiben dabei das ungestörte Zwei-Komponenten-System ("Atom") bzw. die freie Strahlungsmode, wobei a und $a^\dagger$ der übliche Vernichter bzw. Erzeuger des Oszillators sind. Der letzte Term H_int beschreibt die Übergänge von E_1 nach E_2 unter Absorption eines Photons bzw. von E_2 nach E_1 unter Emission eines Photons. Der Zustandsraum wird also von den Zuständen $|1\rangle|N\rangle$ und $|2\rangle|N\rangle$ aufgespannt, wobei $N \in \mathbb{N}_0$ die Zustände des Quantenoszillators ("Anzahl der Photonen") bezeichnet.

a) Seien p_1 und p_2 die Wahrscheinlichkeiten daß sich das Zwei-Komponenten-System im Zustand E_1 bzw. E_2 befindet und $\bar{N} = \langle a^\dagger a\rangle$ der Erwartungswert der Anzahl der Photonen. Berechnen Sie mit Hilfe von Fermi's goldener Regel und dem Kommutator $[a, a^\dagger]_- = 1$ die Änderungssrate dp_2/dt

$$\frac{dp_2}{dt} = B_{1\to 2}\bar{N}p_1 - B_{2\to 1}\bar{N}p_2 - A_{2\to 1}p_2 \,.$$

Berechnen Sie dazu separat die Übergangsraten für $|1\rangle|N\rangle \to |2\rangle|N-1\rangle$ und $|2\rangle|N\rangle \to |1\rangle|N+1\rangle$.

b) In welcher Beziehung stehen die *Einstein-Koeffizienten* $B_{1\to 2}$, $B_{2\to 1}$ und $A_{2\to 1}$ für Absorption, induzierte Emission bzw. spontane Emission zueinander ?

-

-

-

3. (20 Punkte) Streulänge des Yukawa-Potentials

Gegeben sei das Yukawa-Potential

$$V(r) = g\,\frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

mit $\kappa > 0$ einer Konstante. Berechnen Sie die durch

$$a = -\lim_{\mathbf{k},\mathbf{k}'\to 0} f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$$

definierte Streulänge bis zur zweiten Ordnung der Born'schen Näherung, d.h. bis zur zweiten Ordnung in g. Hinweis: Iterieren Sie dazu die Gleichungen

$$f(\mathbf{k},\mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3\mathbf{r}'\, e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}')\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')\,, \tag{1}$$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}, k\mathbf{r}/r) \equiv \psi_{\mathrm{in}}(\mathbf{k},\mathbf{r}) + \psi_{\mathrm{s}}(\mathbf{k},\mathbf{r})\,, \tag{2}$$

einmal, indem Sie die Streuamplitude $f(\mathbf{k},\mathbf{k}')$ mit $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ zunächst in erster Ordnung berechnen, das Resultat in Gl. (2) einsetzen und die resultierende Wellenfunktion wieder in Gl. (1) einsetzen.

-

-

-

4. (15 Punkte) Bosonischer Zwei-Teilchen-Zustand

Gegeben sei der bosonische Zwei-Teilchen-Zustand

$$|2\rangle = \int d^3\mathbf{r}_1 \int d^3\mathbf{r}_2 \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\psi^\dagger(\mathbf{r}_1)\psi^\dagger(\mathbf{r}_2)|0\rangle \, ,$$

wobei $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ eine beliebige normierbare komplexe Funktion sei und die Feldoperatoren $\psi(\mathbf{r})$ die üblichen Kommutationsrelationen

$$[\psi(\mathbf{r}), \psi^\dagger(\mathbf{r}')]_- = \delta^3(\mathrm{r} - \mathbf{r}')$$

erfüllen und $|0\rangle$ der Vakuum-Zustand ist.

a) Berechnen Sie die Normierung $\langle 2|2\rangle$ als Funktion von Raumintegralen von $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und $\phi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Teilchenzahldichte

$$\langle 2|n(\mathbf{r})|2\rangle = \frac{\langle 2|\psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})|2\rangle}{\langle 2|2\rangle}$$

als Funktion von $\mathbf{r}$ unter der Annahme daß $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \phi_1(\mathbf{r}_1)\phi_2(\mathbf{r}_2)$ faktorisiert. Berechnen Sie außerdem die Gesamt-Teilchenzahl

$$N = \int d^3\mathbf{r} \langle 2|n(\mathbf{r})|2\rangle \, .$$

Hinweise: Führen Sie alle möglichen Kontraktionen gemäß $\langle 0|\psi(\mathbf{r})\psi^\dagger(\mathbf{r}')|0\rangle = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ unter Benutzung von $\psi(\mathbf{r})|0\rangle = 0$ durch.

-

-

-