ÜBUNGSBLATT 8 ZU
Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung: 04.1.2011 in den Übungen

1. Schwach wechselwirkendes Bosegas mit Kontakt-Wechselwirkung $V(\mathbf{r}) = \lambda\delta^3(\mathbf{r})$.

   a) Leiten Sie die für ein Kontaktpotential $V(\mathbf{r}) = \lambda\delta^3(\mathbf{r})$ in der Vorlesung diskutierte Formel

   $$n_{>0} = \frac{N_{>0}}{V} = \frac{(nm\lambda)^{3/2}}{3\pi^2}\,.$$

   für die Dichte der Bosonen in angeregten Zuständen im Grundzustand $|\psi_0\rangle$ ab.

   b) Vervollständigen Sie die in der Vorlesung diskutierte Ableitung der Grundzustands-Energie

   $$U_0 = \frac{\pi a}{m}\frac{N^2}{V}\left[1 + \frac{64}{15(2\pi)^{1/2}}(a^3 n)^{1/2}\right]\,.$$

   c) Berechnen Sie aus obiger Formel das chemische Potential

   $$\mu = \frac{\partial U_0}{\partial N}$$

   und die Schallgeschwindigkeit

   $$c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}\,, \quad \text{mit } \rho = mn\,, \quad p = -\frac{\partial U_0}{\partial V}\,.$$

   bitte wenden

2. Schwach wechselwirkendes Bosegas mit Kontakt-Wechselwirkung bei endlicher Temperatur.

a) Berechnen Sie für eine Kontakt-Wechselwirkung, $V_{\mathbf{k}} = \lambda$ =const, die Teilchendichte des Kondensats bei endlicher Temperatur, $n_0(T)$. Verwenden Sie die Bogoliubov-Transformation, um zu zeigen daß

$$n = n_0(T) + \frac{2(mn\lambda)^{3/2}}{\pi^2} \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty dy \frac{\left(\sqrt{1+4y^2} - 1\right)^{1/2}}{e^{2\beta n\lambda y} - 1} \right]$$

gilt, wobei n die Gesamt-Teilchendichte und $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ sind.

b) Leiten Sie daraus ab, daß für $T \to 0$ die Näherung

$$n_0(T) \simeq n_0(T=0) - \frac{m^{3/2}}{12(n\lambda)^{1/2}} (k_{\mathrm{B}}T)^2$$

gilt.

c) Betrachten Sie auch den Grenzfall hoher Temperaturen. Wie vergleicht sich das Resultat mit der Dichte des Kondensats wechselwirkungs-freier Bosonen bei Temperatur unterhalb der kritischen Temperatur, $T < T_c$? Für letztere gilt bekanntlich

$$n_0 = n \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] n \, ,$$

mit

$$k_{\mathrm{B}} T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left[\frac{n}{\zeta(3/2)} \right]^{2/3} \quad .$$