# ÜBUNGSBLATT 7 ZU
# Quantenmechanik II

**Prof. Günter Sigl**
**II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg**
**Luruper Chaussee 149**
**D-22761 Hamburg**
**Germany**
**email: guenter.sigl@desy.de**
**tel: 040-8998-2224**

Besprechung: 14.12.2010 in den Übungen

1. Bogoliubov-Transformation

   a) Zeigen Sie daß die Quasi-Teilchen Erzeuger $\alpha^\dagger_{\mathbf{k}}$ und Vernichter $\alpha_{\mathbf{k}}$,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}\alpha_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\alpha^\dagger_{-\mathbf{k}} \\ a^\dagger_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}\alpha^\dagger_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}\alpha_{-\mathbf{k}}\,, \end{aligned}$$

   genau dann den kanonischen Vertauschungsrelationen

$$\left[\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_\pm = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\,, \quad \left[\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}'}\right]_\pm = \left[\alpha^\dagger_{\mathbf{k}}, \alpha^\dagger_{\mathbf{k}'}\right]_\pm = 0\,,$$

   wenn die reellen Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ den Relationen

$$u^2_{\mathbf{k}} - v^2_{\mathbf{k}} = 1$$

   genügen.

   b) Zeigen Sie daß die Umkehrung der Bogoliubov-Transformation

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}a^\dagger_{-\mathbf{k}} \\ \alpha^\dagger_{\mathbf{k}} &= u_{\mathbf{k}}a^\dagger_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}}a_{-\mathbf{k}}\,, \end{aligned}$$

   lautet.

   **bitte wenden**

2. Zeigen Sie daß der Hamilton-Operator eines schwach wechselwirkenden Bosegases mit Hilfe obiger Bogoliubov-Transformationen auf die Form

$$H \simeq \frac{N^2}{2V} V_0 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}{}' \left( \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + n V_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}} \right) + \sum_{\mathbf{k}}{}' \omega_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}^{\dagger} \alpha_{\mathbf{k}} \,,$$

gebracht werden kann, wenn man für die Koeffizienten der Bogoliubov-Transformation aus Aufgabe 1

$$u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} = -\frac{n V_{\mathbf{k}}}{2\omega_{\mathbf{k}}} \,, \quad v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{(n V_{\mathbf{k}})^2}{2\omega_{\mathbf{k}} \left( \omega_{\mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + n V_{\mathbf{k}} \right)}$$

mit

$$\omega_{\mathbf{k}} \equiv \left[ \left( \frac{k^2}{2m} + n V_{\mathbf{k}} \right)^2 - (n V_{\mathbf{k}})^2 \right]^{1/2} = \left[ \left( \frac{k^2}{2m} \right)^2 + \frac{n k^2 V_{\mathbf{k}}}{m} \right]^{1/2}$$

wählt (siehe Vorlesung für Details).