ÜBUNGSBLATT 4 ZU
Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung am 19.11.2010 in den Übungen

1. Inelastische Streuung

   Die radiale Wellenfunktion sei im Grenzfall $r \to \infty$ durch

$$R_l^{>a}(r) = \frac{1}{2}\left[h_l^*(kr) + s_l(k)\, e^{2i\delta_l(k)} h_l(kr)\right]$$

   gegeben, wobei $h_l(\rho) \equiv h_l^{(1)}(\rho)$ die erste Hankelfunktion ist und die Amplitude $0 \le s_l(k) \le 1$ den nicht-absorbierten Teil der Wellenfunktion beschreibt.

   a) Berechnen Sie den radialen Teilchenfluß

$$j_r(\Omega) \equiv \frac{\hbar}{m}\,\mathrm{Im}\left[R_l^*(r)\frac{dR_l}{dr}\right]$$

   b) Berechnen Sie den vom Streuzentrum absorbierten Fluß

$$\Gamma_r = -\int d\Omega r^2 j_r$$

   und zeigen Sie daß

$$\Gamma_r = \frac{\hbar k}{m}\frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)[1 - s_l^2(k)]\,,$$

   gilt. Hinweis: Verwenden Sie die Orthogonalitätsrelationen für die Legendre Polynome.

   bitte wenden

c) Zeigen Sie daß der inelastische Wirkungsquerschnitt durch

$$\sigma_{\text{inel}}(k) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[1 - s_l^2(k)]$$

gegeben ist.

d) Zeigen Sie daß der elastische Wirkungsquerschnitt durch

$$\sigma_{\text{el}}(k) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)[1 + s_l^2(k) - 2s_l(k)\cos 2\delta_l(k)]$$

gegeben ist.

2. Alternative Ableitung des optischen Theorems für elastische Streuung

a) Zerlegen Sie den zu der Wellenfunktion bei großen Abständen

$$\lim_{r\to\infty} \psi_{\text{tot}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}, k\mathbf{r}/r) \equiv \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{s}}(\mathbf{r})$$

gehörigen Radialstrom

$$j_{r,\text{tot}}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{m} \,\text{Im} \left[\psi^*_{\text{tot}}(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_{\text{tot}}(\mathbf{r})}{\partial r} \right] = j_{r,\text{in}} + j_{r,\text{s}} + j_{r,\text{int}}$$

in die Beiträge $j_{r,\text{in}}$, $j_{r,\text{s}}$ von ψ_{in} bzw. ψ_{s} und den Interferenzterm $j_{r,\text{int}}$.

b) Betrachten Sie die dazu gehörigen Flüsse durch eine Kugel mit Radius $r \to \infty$

$$\Gamma_{r,i} = \lim_{r\to\infty} r^2 \int d\Omega j_{r,i}(\mathbf{r})$$

für $i =$tot, in, int. Zeigen Sie daß $\Gamma_{r,\text{tot}} = \Gamma_{r,\text{in}} = 0$, woraus

$$\Gamma_{r,\text{s}} + \Gamma_{r,\text{int}} = 0$$

folgt. Versuchen Sie daraus das optische Theorem

$$\sigma(k) = \int d\Omega \, |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \frac{4\pi}{k} \,\text{Im} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}' = \mathbf{k})$$

herzuleiten. Diese Ableitung zeigt daß das optische Theorem der Erhaltung der Teilchenzahl entspricht.