

ÜBUNGSBLATT 2 ZU Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung am 05.11.2010 in den Übungen

1. sphärische Bessel- und Hankelfunktionen

- a) Berechnen Sie die ersten drei sphärischen Bessel- und Hankel-Funktionen $j_l(\rho)$ und $n_l(\rho)$ für $l = 0, 1, 2$.
b) Zeigen Sie daß die durch

$$R_l(\rho) = \rho^l \chi_l(\rho)$$

definierten Funktionen der Differentialgleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2(l+1)}{\rho} \frac{d}{d\rho} + 1 \right] \chi_l(\rho) = 0. \quad (1)$$

genügen, wenn $R_l(\rho)$ Lösungen der radialen Schrödingergleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] R_l(\rho) = 0. \quad (2)$$

für konstantes Potential sind.

- c) Zeigen Sie die Rekursionsrelation

$$\chi_l(\rho) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \chi_0(\rho).$$

für Lösungen der Differentialgleichung (1), wobei $\chi_0(\rho)$ eine beliebige Lösung dieser Differentialgleichung für $l = 0$ ist.

bitte wenden

d) Geben Sie das asymptotische Verhalten der sphärischen Bessel- Neumann- und Hankel-Funktionen, $j_l(\rho)$, $n_l(\rho)$, und $h_l^{1,2}(\rho)$ für $\rho \rightarrow 0$ und für $\rho \rightarrow \infty$ mit den zugehörigen Rechenschritten an. Hinweise: Für $\rho \rightarrow 0$ machen Sie für diese Funktionen den Ansatz

$$\rho^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n = c_0 \rho^\lambda + \mathcal{O}(\rho^{\lambda+1})$$

und bestimmen Sie λ durch Einsetzen in Gl. (2). Anschließend kann der Koeffizient c_0 mit Hilfe der Reihenentwicklung von $(\sin \rho)/\rho$ und $(\cos \rho)/\rho$ ermittelt werden.

2. Entwicklung ebener Wellen nach Kugelfunktionen

Zeigen Sie, daß sich eine ebene Welle $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\mu}$ wie folgt entwickeln lässt:

$$e^{ikr\mu} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\mu),$$

wobei $P_l(\mu)$ die Legendre-Polynome

$$P_l(\mu) \equiv \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l} (\mu^2 - 1)^l$$

und $j_l(\rho)$ die sphärischen Besselfunktionen

$$j_l(\rho) \equiv (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin \rho}{\rho}.$$

sind. Hinweise: Gehen Sie von dem Ansatz

$$e^{ikr\mu} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l j_l(kr) P_l(\mu)$$

aus. Zur Bestimmung des Entwicklungskoeffizienten C_l entwickeln Sie für $kr \ll 1$ beide Seiten bis zur Ordnung $(kr)^l$ und vergleichen Sie die Koeffizienten. Verwenden Sie dazu die Orthogonalitätsrelationen für Legendre-Polynome,

$$\int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1},$$

berechnen Sie daraus $\int_{-1}^{+1} d\mu \mu^l P_l(\mu)$, und verwenden Sie das asymptotische Verhalten

$$j_l(\rho) \simeq \frac{2^l l!}{(2l+1)!} \rho^l = \frac{\rho^l}{(2l+1)!!} \quad \text{für } \rho \ll 1$$

der sphärischen Besselfunktionen aus Aufgabe 1d, wobei $(2l+1)!! \equiv 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l+1)$.