ÜBUNGSBLATT 10 ZU
Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung: 1.2.2011 in den Übungen

1. Eigenschaften von Dirac-Matrizen

   Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Relationen:

   a) $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.

   b) $\sigma_{ij} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_j]_- = \sigma^{ij} = \epsilon^{ijk}\Sigma^k \equiv \epsilon^{ijk}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$ für $i, j = 1, 2, 3$ räumliche Indizes.

2. Zeigen Sie daß
$$\tau = \frac{1}{8}\Delta\omega^{\mu\nu}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = -\frac{i}{4}\Delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$$
   den Gleichungen
$$[\gamma^\mu, \tau]_- = \Delta\omega^\mu{}_\nu\gamma^\nu\,, \quad \mathrm{Tr}(\tau) = 0$$
   genügen.

3. Drehimpulserhaltung

   Zeigen Sie explizit daß der Operator für den Gesamt-Drehimpuls
$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{\hbar}{2}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$
   mit dem Dirac-Hamiltonian für ein Zentralpotential
$$H = c_0\,(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m c_0) + e\phi(|\mathbf{r}|)$$
   vertauscht.

   bitte wenden

4. Dirac-Spinor Transformationen

a) Berechnen Sie $S(\Lambda)$ für eine Drehung um einen Winkel θ um die $z-$Achse, d.h. für

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie $S(\Lambda)$ für einen Lorentz-boost entlang der $x-$Achse d.h. für

$$x^{\mu\prime} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\eta & -\sinh\eta & 0 & 0 \\ -\sinh\eta & \cosh\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

mit

$$\cosh\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \sinh\eta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \tanh\eta = \beta\,.$$

Hinweise: Schreiben Sie die Matrix Λ zunächst als

$$\Lambda = e^{\omega}$$

mit einer geeignet gewählten anti-symmetrischen $4\times 4-$Matrix $\omega^{\mu}{}_{\nu}$ und verwenden Sie dann die Gleichung

$$S(e^{\omega}) = \exp\left[-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}\right].$$