ÜBUNGSBLATT 1 ZU
Quantenmechanik II

Prof. Günter Sigl
II. Institut für Theoretische Physik der Universität Hamburg
Luruper Chaussee 149
D-22761 Hamburg
Germany
email: guenter.sigl@desy.de
tel: 040-8998-2224

Besprechung am 29.10.2010 in den Übungen

1. Störungstheorie bei instantaner Änderung des Hamilton-Operators

   Gegeben seien zwei zeitunabhängige Hamilton-Operatoren H_1 und H_2 mit bekannten diskreten Eigenzuständen $|\psi_n^{1,2}\rangle$ und Energie-Eigenwerten $E_n^{1,2}$,

$$H_1|\psi_n^1\rangle = E_n^1|\psi_n^1\rangle\,, \quad H_2|\psi_n^2\rangle = E_n^2|\psi_n^2\rangle\,.$$

   Zu Zeiten $t < 0$ befinde sich das System im Eigenzustand $|\psi_m^1\rangle$ von H_1. Zur Zeit $t \sim 0$ ändere sich der Hamiltonian innerhalb einer kurzen Zeit τ von H_1 nach H_2, d.h. der zeitabhängige Hamiltonian ist

$$H(t) = [1 - f(t)]H_1 + f(t)H_2\,,$$

   wobei die Funktion $f(t)$ sich bei $t \sim 0$ auf einer Zeitskala τ von 0 nach 1 ändert, mit $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 1$ und $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

   a) Drücken Sie im Limes $\tau \to 0$ die Wellenfunktion des Systems zu großen Zeiten, $|\psi(t)\rangle$, $t \gg \tau$ durch die Eigenfunktionen $|\psi_n^2\rangle$ von H_2 aus.

   b) Der charakteristische Abstand zwischen den Energie-Eigenwerten von H_1 und H_2 sei ΔE. Welche Ungleichung muß zwischen τ und ΔE gelten, damit der Limes aus Teilaufgabe a) eine gute Näherung darstellt ? Hinweis: Betrachten Sie dazu den allgemeinen Ausdruck

$$U(t, t_0) = T \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')\right]\,,$$

   für die unitäre zeitliche Entwicklung eines Zustandes.

2. WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin) Näherungsmethode

a) Betrachten Sie für die stationäre ein-dimensionalen Schrödingergleichung

$$\frac{d^2\psi_E(x)}{dx^2} = -\frac{2m}{\hbar^2}\left[E - V(x)\right]\psi_E(x)\,. \tag{1}$$

den Ansatz

$$\psi(x) = A(x)e^{iS(x)/\hbar}\,,$$

wobei die reellen Funktionen $A(x)$ und $S(x)$ die Amplitude bzw. die Phase der Wellenfunktion sind. Zeigen Sie, daß im Grenzfall

$$\hbar^2\frac{d^2A}{dx^2} \ll A\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \tag{2}$$

die Wellenfunktionen

$$\psi_\pm(x) = \frac{\exp\left[\pm i\int dx p(x)/\hbar\right]}{\left[p(x)\right]^{1/2}}$$

Lösungen der stationären ein-dimensionalen Schrödingergleichung (1) sind, wobei der Impuls

$$p(x) = \left[2m(E - V(x))\right]^{1/2}$$

ist.

b) Zeigen Sie daß die Bedingung Gl. (2) erfüllt ist falls

$$\left|\frac{dp}{dx}\right| \ll \frac{p^2}{\hbar}\,.$$