

1. (3 Punkte) Der Druck eines Systems sei als Funktion $p(T, V, N)$ von Temperatur, Volumen und Teilchenzahl gegeben. Drücken Sie die partielle Ableitung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial N} \right|_{T, V}$$

durch die Ableitung

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{T, N}$$

aus.

2. (6 Punkte) Betrachten Sie ein System von N klassischen *unterscheidbaren* harmonischen Oszillatoren mit Masse m und natürlicher Frequenz ω . Der Hamiltonian für einen der Oszillatoren ist also durch

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$$

gegeben. Berechnen Sie zunächst die Entropie $S(U, V, N)$ und daraus die drei Zustandsgleichungen für Temperatur, Druck und chemisches Potential.

3. (6 Punkte) Betrachten Sie die Gaußsche Wahrscheinlichkeitsverteilung mit Standardabweichung σ ,

$$p_G(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad -\infty < x < +\infty.$$

- a) Berechnen Sie die Entropie dieser Verteilung, d.h.

$$S[p(x)] = -k_B \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx$$

für $p(x) = p_G(x)$.

- b) Zeigen Sie, daß für jede andere Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ mit gleichem zweiten Moment $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx = \sigma^2$ gilt

$$S[p(x)] \leq S[p_G(x)],$$

d.h. die Gaussverteilung maximiert zu gegebenem zweiten Moment die Entropie. Hinweis: Um ein Extremum zu finden variieren Sie das Integral in $S[p(x)]$ nach $p(x)$ unter den Nebenbedingungen von fixiertem $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$. Um nachzuweisen, daß es sich um ein Maximum handelt, finden Sie sodann ein $p(x)$ für das $S[p(x)] < S[p_G(x)]$.

-

-

-

4. (5 Punkte) Osmotischer Druck:

Eine Membran teile ein System in zwei Teile. In einem der Teile befinde sich neben dem Lösungsmittel L auch ein gelöster Stoff mit Konzentration $x_s = N_s/(N_L + N_s) = 1 - x_L \ll 1$ (N_L und N_s sind die Anzahl von Molekülen des Lösungsmittels bzw. des gelösten Stoffs), während der andere Teil nur aus Lösungsmittel bestehe. Die Membran sei für Wärme und für das Lösungsmittel durchlässig, nicht aber für den gelösten Stoff. Berechnen Sie näherungsweise die Druckdifferenz zwischen den beiden Teilsystemen als Funktion der Konzentration x_s des gelösten Stoffes. Hinweis: Benutzen Sie die Abhängigkeit des chemischen Potentials von Druck und Konzentration und nehmen Sie an daß das spezifische Volumen des Lösungsmittels konstant sei.

-

-

-