# Matrizen und Tensoren



$$m\times n\text{-Matrix}\quad A = \begin{array}{c} \\ \left( \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array} \rightarrow i\text{-te Zeile}$$

$\uparrow$ $j$-te Spalte

$$A = (a_{ij})$$

Rechenoperationen:

1.) Addition $\quad C = A + B \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

nur gleichartige $m\times n$-Matrizen können addiert werden

2.) skalare Multiplikation:

$$C = \lambda A \qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

3.) Matrix-Multiplikation:

Sei $A = (a_{ij}) = m\times n$-Matrix, $B = (b_{kl}) = n\times r$-Matrix

$$\Rightarrow \quad C = AB \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = m\times r\text{-Matrix}$$

$\downarrow$

"Zeile $i$ x Spalte $j$"

Spezialfall: $B = x = n\times 1$-Matrix = Vektor mit $n$-Komponenten

$\Rightarrow \quad Ax = m\times 1$-Matrix = Vektor mit $m$ Komponenten

z.B. $m = n \rightarrow$ quadratische Matrix

$$A\check{x} = \check{b} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

lineares Gleichungssystem

Rechenregeln:

$$A + B = B + A \quad \text{kommutativ}$$

$$A(B+C) = AB + AC \quad \text{assoziativ}$$

$$A(BC) = (AB)C = ABC \quad \text{distributiv}$$

aber: $AB \neq BA$ im allgemeinen

$[A, B] := AB - BA$ Kommutator

Spielt wichtige Rolle in der Quantenmechanik

Die "Transponierte" $A^T$ einer Matrix $A$ erhält man durch Vertauschen von Zeilen und Spalten: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Es gilt:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

<u>Quadratische $n \times n$ Matrizen</u>

bilden eine "Algebra" unter Addition und Multiplikation mit Zahlen ~~Sow~~ sowie Matrixmultiplikationen.

Einheitsmatrix:

$$E = \mathbb{1} = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$EA = AE = A \quad \forall A$$

Determinante:

$$|A| = \det A = \sum_{\substack{\text{Permutationen} \\ P(1,2,\ldots,n)}} (-)^P a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}$$

$$(-)^P = \begin{cases} 1 & \text{gerade Permutationen} \\ -1 & \text{ungerade Permutationen} \end{cases}$$

$n=2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$n=3$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Man kann zeigen:

$$|A^T| = |A|$$

$$|AB| = |BA| = |A|\,|B|$$

Wenn $|A| \neq 0$ dann gibt es eine inverse Matrix $A^{-1}$ mit

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1} = E$$

In diesem Fall hat ein lineares Gleichungssystem

$A\vec{x} = \vec{b}$ die eindeutige Lösung $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Anwendung: Taylorentwicklung im $\mathbb{R}^n$:

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}_0)(x_i - x_{0i}) + \cancel{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}(\vec{r}_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j})}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \dots$$

$\vec{r} = (x_i)$ $\quad \vec{r}_0 = (x_{0i})$

kann geschrieben werden als

$$f(\vec{r}) = f(\vec{r}_0) + \vec{\nabla} f(\vec{r}_0)\cdot(\vec{r} - \vec{r}_0) + \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_0)^T Q\,(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

mit $\quad Q_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{r}_0)$

Beispiel: Entwicklung des Potential $\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|}$ einer Punktquelle bei $\vec{a}$ um $\vec{r} = 0$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|^2}\frac{\partial}{\partial x_i}|\vec{r} - \vec{a}| = -\frac{x_i - a_i}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = -\frac{\delta_{ij}}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} + \frac{3(x_i - a_i)(x_j - a_j)}{|\vec{r} - \vec{a}|^5}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} = \frac{1}{a} + \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{a^3} + \frac{\vec{r}^{\,T} Q\,\vec{r}}{2a^5}$$

mit $\quad Q_{ij} = 3a_i a_j - a^2\delta_{ij}$

Eigenschaften: $\quad Q_{ij} = Q_{ji} \quad$ Symmetrie

Spur (trace) $\quad \mathrm{Tr}\, Q \equiv \sum_j Q_{jj} = \sum_j (3a_j a_j - a^2 \delta_{jj}) = 3a^2 - 3a^2 = 0$

Summe der Diagonalelemente

Tensoren n-ter Stufe sind Objekte mit $n$ Indizes die sich für jeden Index wie ein Vektor transformieren (Koordinatentransformationen siehe später)

Also: Skalar = Zahl = Tensor 0te Stufe
Vektor = Tensor 1ste Stufe
Matrix = Tensor 2ter Stufe
$\varepsilon_{ijk}$ = Tensor 3ter Stufe

$\check{x}$ heißt <u>Eigenvektor</u> zum <u>Eigenwert</u> $\lambda$ wenn

$$A\check{x} = \lambda \check{x} \quad \text{für } \check{x} \neq 0$$

$$\lambda \text{ Eigenwert} \Leftrightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = 0$$

wenn $A$ $n\times n$ Matrix, dann ist

$$|A - \lambda \mathbb{1}| = a_0 + a_1 \lambda + \dots + (-1)^n \lambda^n = \chi_n(\lambda)$$

das <u>charakteristische Polynom</u> n-ten Grades mit $n$ (u.U. auch Mehrfach-nullstellen)

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \dots (\lambda_n - \lambda)$$

also sind $\lambda_i$ die Eigenwerte von $A$

<u>Satz</u>: Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind reell

Beweis: $\sum_{i,j} (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_i^* x_j = 0$ ⟶ multipliziere $\sum_j a_{ij} x_j = \lambda x_i$ mit $x_i^*$

$$\underset{\text{komplexe Konjugation}}{\Rightarrow} \sum_j (a_{ij} - \lambda^* \delta_{ij}) x_i x_j^* = 0$$

subtrahiere und verwende Symmetrie von $a_{ij}$ und $\delta_{ij}$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} (-\lambda + \lambda^*) \delta_{ij} x_i^* x_j = (\lambda^* - \lambda) \sum_i |x_i|^2 = 0 \Rightarrow \lambda^* = \lambda$$

da $|\check{x}| \neq 0$

Satz: Die Eigenvektoren einer reellen, symmetrischen Matrix zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal

Beweis:

$$\sum_j a_{ij} x_j = \alpha x_i \qquad \sum_j a_{ij} y_j = \beta y_i \qquad \alpha \neq \beta$$

multipliziere mit $y_i$ bzw. $x_i$ und summiere über $i$

$$\Rightarrow \sum_{ij} a_{ij} y_i x_j = \alpha \sum_i x_i y_i$$

$$\sum_{ij} a_{ij} x_i y_j = \beta \sum x_i y_i \quad -$$

$$\Rightarrow 0 = (\alpha - \beta) \sum_i x_i y_i = (\alpha - \beta)\, \check{x} \cdot \check{y} \quad \Rightarrow \check{x} \cdot \check{y} = 0 \quad \text{da } \alpha \neq \beta$$

Subtraktion mit $a_{ij} = a_{ji}$

Beispiel: Trägheitstensor einer Massenverteilung

$$I_{ij} = \int dV \rho \left( \delta_{ij} r^2 - x_i x_j \right) \qquad \check{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

Massendichte

reell und symmetrisch ~~Volumen~~-Integral

Eigenwerte sind reell und heißen Hauptträgheitsmomente mit entsprechenden Hauptträgheitsachsen ($\hat{=}$ Eigenvektoren $\check{x}_i$)

Beispiel:

asymmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_\pm = 3, -1$$

Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1-\lambda_\pm & 4 \\ 1 & 1-\lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\pm 1} \\ x_{\pm 2} \end{pmatrix} = 0$

$\lambda = \lambda_+ \Rightarrow -2x_{+1} + 4x_{+2} = 0 \Rightarrow x_{+1} = 2x_{+2} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_+ = 3$

analog: $\alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_- = -1$

Beispiel symmetrische Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A - \lambda \mathbb{1}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

$\Rightarrow \lambda_\pm = 3, -1$ wie vorher

Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1-\lambda_\pm & 2 \\ 2 & 1-\lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\pm 1} \\ x_{\pm 2} \end{pmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{+1} \\ x_{+2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_{+1} + 2x_{+2} = 0$$

$\Rightarrow x_{+1} = x_{+2} \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda = \lambda_+$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{-1} \\ x_{-2} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_{-1} = -x_{-2}$$

$\Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren zu $\lambda = \lambda_-$

Die Eigenvektoren sind nun orthogonal, wie erwartet

$$(1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

## physikalische Rolle des Trägheitstensors:

Starrer Körper rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Ein Massenelement $dm = \rho\, dV$ am Ort $\vec{r}$ macht dann folgenden Beitrag zum Drehimpuls:

$$d\vec{L} = dm\, \vec{r} \times \vec{v} \underset{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}{=} \rho\, \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dV \underset{\text{bac - cab Regel}}{=}$$

$$= \rho \left[ \vec{r}^{\,2} \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})\, \vec{r} \right] dV$$

$$\Rightarrow dL_i = \rho \left[ r^2 \omega_i - x_i \sum_j \omega_j x_j \right] dV$$

$$\Rightarrow L_i = \sum_j I_{ij}\, \omega_j$$

mit dem Trägheitstensor

$$I_{ij} = \int dV \rho \left( \delta_{ij} r^2 - x_i x_j \right) \qquad \vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

Beitrag des Massenelements $dm$ zur kinetischen Energie:

$$dE_{kin} = \frac{1}{2} dm\, \vec{v}^{\,2} = \frac{1}{2} \rho (\vec{\omega} \times \vec{r})^2\, dV \underset{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})}{=}$$

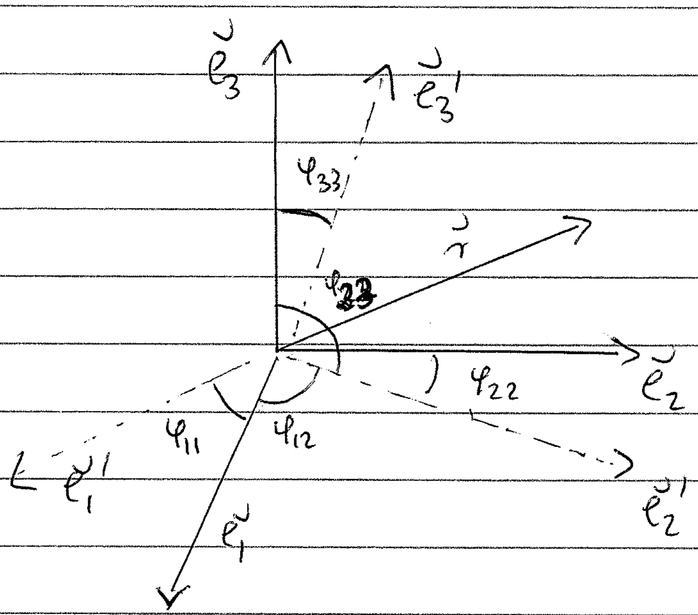
$$= \frac{1}{2} \rho \left[ \omega^2 r^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r})^2 \right] dV =$$

$$\frac{1}{2} \rho \left[ \left( \sum_i \omega_i^2 \right) \left( \sum_j x_j^2 \right) - \left( \sum_i \omega_i x_i \right) \left( \sum_j \omega_j x_j \right) \right] dV$$

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_{ij}\, \omega_i \omega_j$$

mit $I_{ij}$ wieder dem Trägheitstensor

# Vektoren und Koordinatentransformationen




Drehung
$$\breve{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} D_{ij}\, \breve{e}_j$$

Eigenschaften: 1.) $\cos\varphi_{ik} = \breve{e}_k \cdot \breve{e}_i' = \breve{e}_k \cdot \sum_j D_{ij}\, \breve{e}_j = D_{ik}$

2.) $\delta_{ik} = \breve{e}_i' \cdot \breve{e}_k' = \left(\sum_j D_{ij}\, \breve{e}_j\right) \cdot \left(\sum_l D_{kl}\, \breve{e}_l\right) =$

$$= \sum_{jl} D_{ij} D_{kl} \underbrace{\breve{e}_j \cdot \breve{e}_l}_{\delta_{jl}} = \sum_j D_{ij} D_{kj}$$

$\Rightarrow$ D bildet paarweise orthogonale Spaltenvektoren

3.) $\Rightarrow$
$$D = \begin{vmatrix} \breve{e}_1' \cdot \breve{e}_1 & \breve{e}_2' \cdot \breve{e}_1 & \breve{e}_3' \cdot \breve{e}_1 \\ \breve{e}_1' \cdot \breve{e}_2 & \breve{e}_2' \cdot \breve{e}_2 & \breve{e}_3' \cdot \breve{e}_2 \\ \breve{e}_1' \cdot \breve{e}_3 & \breve{e}_2' \cdot \breve{e}_3 & \breve{e}_3' \cdot \breve{e}_3 \end{vmatrix} = \breve{e}_1' \cdot (\breve{e}_2' \times \breve{e}_3') = 1$$

orthogonale Rechtssystem

4.) $\delta_{ik} = \sum_j D_{ij} D_{kj} = \sum_j D_{ij} (D^T)_{jk}$

$\Rightarrow \quad D^{-1} = D^T \quad \Rightarrow \quad D D^T = D^T D = \mathbb{1}$

$\Rightarrow$ D ist "orthogonale Matrix"

Beispiel: Zweidimensionale Drehungen

$$D(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \breve{e}_1' \\ \breve{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \breve{e}_1 \\ \breve{e}_2 \end{pmatrix}$$

$$D(\varphi_2)\, D(\varphi_1) = D(\varphi_1)\, D(\varphi_2) = D(\varphi_1 + \varphi_2)$$

für $\geq 3$ Dimensionen kommutieren Drehungen i.a. nicht !

Transformation von Vektorkomponenten:

$$\breve{r} = \sum_i x_i \breve{e}_i = \sum_i x_i' \breve{e}_i'$$

$$\Rightarrow \quad x_j' = \breve{e}_j' \cdot \breve{r} = \sum_i x_i\, \breve{e}_j' \cdot \breve{e}_i = \sum_i D_{ji} x_i$$

also $\breve{x}' = D \breve{x}$ $\Rightarrow$ Komponenten transformieren wie Einheitsvektoren

Ausblick: Bei nicht-orthogonalen Transformationen ist dies nicht der Fall und man unterscheidet ko- und kontravariante Vektoren

Anwendung: $|\breve{x}'|^2 = \breve{x}' \cdot \breve{x}' = \breve{x}'^T \breve{x}' = \breve{x}^T \underbrace{D^T D}_{=\mathbb{1}} \breve{x} = \breve{x}^T \breve{x} = \breve{x} \cdot \breve{x} = |\breve{x}|^2$

$\Rightarrow$ Norm erhalten

# Lineare Differentialgleichungen

Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t) \qquad (1)$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten. Wichtig z.B. zur Beschreibung von Schwingungen.
Gleichung 2. Ordnung kann in 2 Gleichungen 1. Ordnung umgeschrieben werden:

$$\dot{x} = v$$
$$\dot{v} = f(t) - b(t)x - a(t)v$$

beschreibt z.B. Trajektorien im Phasenraum

Gl. (1) heißt "inhomogen" wenn $f(t) \neq 0$, ansonsten "homogen"

Die Lösungen von homogenen Differentialgleichungen bilden einen linearen Vektorraum, d.h. Linearkombinationen von Lösungen sind wieder Lösungen. Ferner ist die Lösung für jede Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ eindeutig.

<u>Satz</u>: Seien $x_1(t)$, $x_2(t)$ zwei Lösungen der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

So erfüllt die <u>Wronski-Determinante</u>

$$W(t) \equiv x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t)$$

die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{W}(t) = -a(t)W(t)$$

<u>Beweis</u>:

$$\dot{W} = x_1\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einsetzen Differentialgl.}}}{=} x_1(-a\dot{x}_2 - bx_2) - (-a\dot{x}_1 - bx_1)x_2$$

$$= -a(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2) = -aW$$

Lösung dieser Gleichung:

$$\frac{dw}{w} = -a(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \ln\frac{w(t)}{w(t_0)} = -\int_{t_0}^{t} dt'\,a(t')$$

$$\Rightarrow \quad w(t) = w(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} dt'\,a(t')}$$

Satz: Zwei Lösungen $x_1(t), x_2(t)$ sind genau dann linear abhängig, wenn $w(t) = x_1(t)\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)x_2(t) \equiv 0$

Beweis: Sei $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \equiv 0$ mit $\lambda_1 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2 \; ; \quad \dot{x}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\dot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad W = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2\dot{x}_2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\dot{x}_2 x_2 = 0$$

für $\lambda_2 \neq 0$ analog

Sei $w(t) \equiv 0$. Wenn auf einem Intervall $x_1, x_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{\dot{x}_1}{x_1} = \frac{\dot{x}_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \ln x_1(t) = \ln x_2(t) + \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = \text{const.} \cdot x_2(t) \quad \Rightarrow \quad x_1, x_2 \text{ linear abhängig}$$

Satz: Sei $x(t)$ eine auf einem Intervall nicht-verschwindende Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dann ist

$$y(t) = x(t)\int^{t}\frac{w(t')}{x^2(t')}\,dt' \qquad \text{mit } w(t) = e^{-\int^{t} a(t')dt'}$$

eine linear unabhängige Lösung, wobei die unteren Integrationsgrenzen beliebig sind.

Beweis

$$\dot{y} = \dot{x}\underbrace{\int^{t}\frac{w(t')}{x^2(t')}dt'}_{=\frac{y}{x}} + x\frac{w}{x^2} = \frac{1}{x}(y\dot{x} + w) \quad \Rightarrow \quad w = x\dot{y} - \dot{x}y \neq 0$$

$\Rightarrow$ $x$ und $y$ linear unabhängig. Ferner

$$w = x\dot{y} - \dot{x}y \quad \Rightarrow \quad x\ddot{y} - \ddot{x}y = \dot{w} = -aw = -a(x\dot{y} - \dot{x}y)$$

$\Rightarrow \quad x(\ddot{y}+a\dot{y}) - y(\ddot{x}+a\dot{x}) = 0$

da $\ddot{x}+a\dot{x} = -bx \quad \Rightarrow \quad x(\ddot{y}+a\dot{y}+by) = 0$

Da $x \neq 0$ auf betrachtetem Intervall $\Rightarrow$ $\ddot{y}+a\dot{y}+by = 0$, also ist $y(t)$ eine Lösung

Eine allgemeine Lösung $x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ einer homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung kann durch Wahl geeigneter Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2$ jede Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ erfüllen:

$$x_0 = \lambda_1 x_1(t_0) + \lambda_2 x_2(t_0)$$

$$v_0 = \lambda_1 \dot{x}_1(t_0) + \lambda_2 \dot{x}_2(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{x_0 \dot{x}_2(t_0) - v_0 x_2(t_0)}{x_1(t_0)\dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0) x_2(t_0)}$$

$$\lambda_2 = \frac{v_0 x_1(t_0) - x_0 \dot{x}_1(t_0)}{x(t_0)\dot{x}_2(t_0) - \dot{x}_1(t_0) x_2(t_0)}$$

Sind eindeutige Lösungen da der Nenner $= W(t_0) \neq 0$

Ist $\tilde{x}(t)$ irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung (1), und sind $x_1(t), x_2(t)$ linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung, so ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x(t) = \tilde{x}(t) + \lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$$

## Lineare Schwingungen

Der harmonische Oszillator mit äußerer Krafteinwirkung als lineare Näherung der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} = F(x,t)$$

(Als gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung hat sie i.a. eine eindeutige Lösung für zwei Bedingungen, e.g.
Anfangsbedingungen: $x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = v_0$
Randbedingungen $\quad x(t_0) = x_0 \quad x(t_1) = x_1$ )

$$F(x,t) = F_0(t) + a(t)\,x + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2(t)\,x = f(t)$$

$$\text{mit} \quad \omega_0^2(t) = -\frac{a(t)}{m} \quad ; \quad f(t) = \frac{F_0(t)}{m}$$

Gedämpfte Oszillator mit zusätzlichen Reibungskräften:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \qquad \gamma \geq 0$$

Spezialfall: $\omega_0 = \text{const.} \quad f(t) = f_0 \cos \Omega t$

## Freie Schwingungen

homogene Diff-gleichung (keine äußere Kraft):

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Ungedämpfte Schwingungen: $\gamma = 0$

reelle Lösungen:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) \qquad A, \alpha \in \mathbb{R}$$

Umformung: $x(t) = \underbrace{A\cos\alpha}_{a} \cos\omega_0 t \underbrace{- A\sin\alpha}_{b} \sin\omega_0 t$

komplexe Lösungen:

$$x(t) = a_+ e^{i\omega_0 t} + a_- e^{-i\omega_0 t}$$

Vorteil: leichtere Handhabung von Exponentialfunktionen

Zur Erinnerung:

$$e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \sin\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right) \; ; \; \sin\omega_0 t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Diese Lösungen sind periodisch: $x\left(t + \frac{2\pi}{\omega_0}\right) = x(t)$

gedämpfte Schwingungen: $\gamma > 0$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x}(t) = \lambda x \; ; \; \ddot{x}(t) = \lambda^2 x$

$$\Rightarrow (\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2)\, x(t) = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

a) Schwingfall: $\omega_0 > \gamma$ : $\lambda_\pm = -\gamma \pm i\omega \; ; \; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

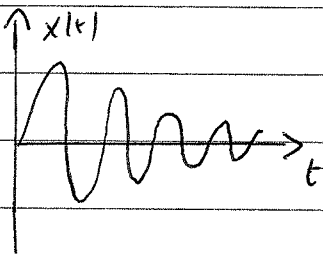
$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}\right)$$

Schreibe: $C_+ = \frac{A}{2} e^{i\alpha}$; $C_- = \frac{A}{2} e^{-i\alpha}$ $\quad C_+, A \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x(t) = A e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$$

Beispiel: Spezialfall $x(0)=0$ $\quad \dot{x}(0) = v_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\gamma t}\sin\omega t$$




Zusammenfassung: Frequenz nimmt ab: $\omega_0 \to \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

Amplitude nimmt ab, um einen Faktor $e^{-\Lambda}$ pro Schwingung mit $\Lambda = \ln\frac{x(t)}{x(t-T)} = \gamma T$

mit $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}$ $\qquad \downarrow$ Logarithmisches Dekrement

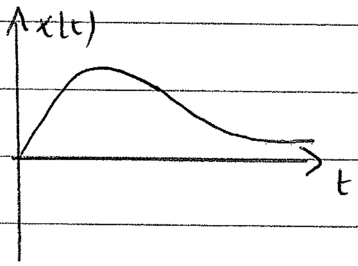
b) Kriechfall: $\omega_0 < \gamma$

definiere $\tilde{\omega} := \sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left(a_+ e^{\tilde{\omega} t} + a_- e^{-\tilde{\omega} t}\right)$$ ist allgemeine Lösung

Beispiel: Spezialfall $x(0)=0$; $\dot{x}(0)=v_0$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{2\tilde{\omega}}e^{-\gamma t}\left(e^{\tilde{\omega} t}-e^{-\tilde{\omega} t}\right) = \frac{v_0}{\tilde{\omega}}e^{-\gamma t}\sinh\tilde{\omega} t$$




c) aperiodischer Grenzfall: $\omega_0=\gamma$

Neben $e^{-\gamma t}$ ist auch $t e^{-\gamma t}$ eine Lösung:

$$x_1(t) := t e^{-\gamma t} \Rightarrow \dot{x}_1(t) = (1-\gamma t)e^{-\gamma t}; \quad \ddot{x}_1(t) = [-\gamma-\gamma(1-\gamma t)]e^{-\gamma t}$$
$$= (-2\gamma+\gamma^2 t)e^{-\gamma t}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x}_1 + 2\gamma\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = (-\gamma^2 + \omega_0^2)\, t e^{-\gamma t} = 0$$ DI-58

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung ist $\quad x(t) = (a + bt)\, e^{-\gamma t}$

## Erzwungene Schwingungen

Es wirke nun eine periodische äußere Kraft $f_0 \cos\Omega t$:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t$$

Finde zunächst eine Lösung der komplexen Gl.

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t} \qquad f_0, \Omega \in \mathbb{R}$$

mit Ansatz $z(t) = A e^{i\Omega t}$, und bilde dann Realteil. Das ergibt Lösung der reellen Gleichung.

$\dot{z}(t) = i\Omega z(t)$; $\ddot{z}(t) = -\Omega^2 z(t)$

$$\Rightarrow \quad (-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) A e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$$

In Polardarstellung ist $A = |A| e^{i\phi}$

$$\Rightarrow \quad |A|^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega)} = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$$

$$\phi = -\arctan\frac{\operatorname{Im} 1/A}{\operatorname{Re}(1/A)} = -\arctan\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad ; \quad |A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

$\Rightarrow$ reelle Lösung $= x(t) = \operatorname{Re} z(t) = |A| \cos(\Omega t + \phi)$

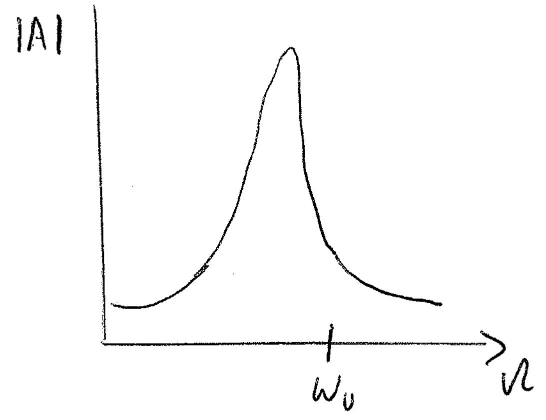
gleiche Frequenz wie treibende Kraft

phasenverschoben

Für $\Omega \ll \omega_0 \Rightarrow \quad |\phi| \ll 1, \; \phi < 0$

$\Omega \to \omega_0 \Rightarrow \quad \phi \to -\frac{\pi}{2}$

Resonanzen:




allgemeine Lösung e.g. im Schwingfall:

$$x(t) = \underbrace{|A| \cos(\Omega t + \phi)}_{\text{"Grenzzyklus"}} + \underbrace{e^{-\gamma t}\left(c_+ e^{i\omega t} + c_- e^{-i\omega t}\right)}_{\text{"Einschwingvorgang"}}$$

Energiebilanz

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2$$

$$\Rightarrow \dot{E} = m(\dot{x}\ddot{x} + \omega_0^2 x\dot{x}) = m\dot{x}(\ddot{x} + \omega_0^2 x) \underset{\text{Bewegungsgleichung}}{=}$$

$$= \underbrace{F_0(t)\dot{x}}_{\text{Arbeit der äußeren Kraft}} - \underbrace{2m\gamma\dot{x}^2}_{\text{Reibungsverluste}}$$

Nach Einschwingvorgang ist Bewegung periodisch mit Periode $\frac{2\pi}{\Omega}$

$$\Rightarrow \int_0^T dt\, 2m\gamma\dot{x}^2 = \int_0^T dt\, F_0(t)\dot{x}$$

Die aufzuwendende Leistung (gemittelt über eine Periode) ist

$$P = \frac{\Delta E}{T} = \frac{2m\gamma}{T}\int_0^T dt\, \dot{x}^2 \underset{\text{Lösung für Grenzzyklus}}{=} \frac{2m\gamma\Omega^2}{T}\int_0^T dt\, |A|^2 \sin^2(\Omega t + \phi) =$$

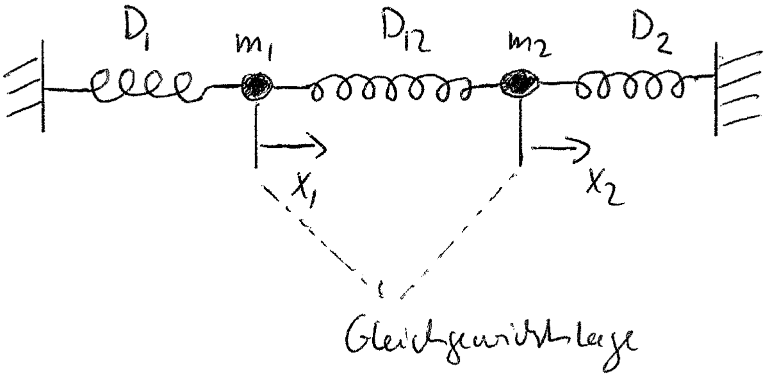
$$= m\gamma\Omega^2|A|^2 = \frac{m\gamma\Omega^2 f_0^2}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+(2\gamma\Omega)^2}$$

$\downarrow$

Mittel von $\sin^2$ über eine Periode ist $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ Integral $= |A|^2\frac{I}{2}$

## Gekoppelte Schwingungen

Beispiel: 2 Massen + 3 Federn:




Bewegungsgleichungen:

$$m_1\ddot{x}_1 = -(D_1+D_{12})x_1 + D_{12}x_2$$
$$m_2\ddot{x}_2 = D_{12}x_1 - (D_2+D_{12})x_2$$

in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1+D_{12} & -D_{12} \\ -D_{12} & D_2+D_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Dies hat die allgemeine Form:

$$m_i\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} k_{ij}x_j = 0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

$$M\ddot{\vec{x}} + K\vec{x} = 0 \qquad M=(m_i\delta_{ij}) \quad K=(k_{ij})$$

Definiere

$$y_i = \sqrt{m_i}\,x_i \qquad i=1,2,\dots,n$$

und dividiere Bewegungsgleichungen durch $\sqrt{m_i}$

$$\Rightarrow \sqrt{m_i}\,\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i}} x_j = \ddot{y}_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} y_j = 0 \qquad i=1,..,n$$

Definiere

$$\Omega^2_{ij} = (\Omega^2)_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{m_i m_j}} \underset{\downarrow}{=} \Omega^2_{ji}$$

wegen "actio = reactio" ist $k_{ij}$ symmetrisch

$$\Rightarrow \quad \ddot{\breve{y}} + \underbrace{\Omega^2}_{\text{Matrix } \breve{0}} \breve{y} = 0$$

Ansatz: $\breve{y} = \breve{a}\, e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow \quad \Omega^2 \breve{a} = \omega^2 \breve{a}$$ $\rightarrow$ Eigenvektorgleichung zum Eigenwert $\omega^2$

$\Rightarrow$ Die charakteristische Gleichung

$$\det(\Omega^2 - \omega^2 \mathbb{1}) = 0$$

liefert $n$ Eigenwerte $\omega_1^2, .. ; \omega_n^2$ mit zugehörigen Eigenvektoren $\breve{a}_1, .. \breve{a}_n$

$\Rightarrow$ "Eigenfrequenzen" $\omega_1, .., \omega_n$ und "Normalkoordinaten" $\breve{a}_1, .., \breve{a}_n$

$\omega_i^2$ sind reell, $\breve{a}_i$ können reell gewählt werden, da auch $\breve{a}_i + \breve{a}_i^*$ Eigenvektor ist. Die Normalkoordinaten sind ferner orthogonal:

$$\breve{a}_i \cdot \breve{a}_j = \delta_{ij}$$

Beachte: Im allgemeinen gilt dies <u>nicht</u> für die $\breve{x}_i$

Die "Normalschwingungen"

$$\breve{y}_\pm^{(i)}(t) = \breve{a}_i e^{\pm \omega_i t} = \breve{y}_c^{(i)}(t) \pm i\, y_s^{(i)}(t)$$

oder

$$\breve{y}_c^{(i)}(t) = \breve{a}_i \cos \omega_i t \quad ; \quad \breve{y}_s^{(i)}(t) = \breve{a}_i \sin \omega_i t$$

sind Lösungen der Bewegungsgleichungen. ⇒ Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination von Normalschwingungen:

$$\check{y}(t) = \sum_{j=1}^{n} \left( c_+^{(i)} \check{y}_+^{(i)}(t) + c_-^{(i)} \check{y}_-^{(i)}(t) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left( c_s^{(i)} \check{y}_s^{(i)}(t) + c_c^{(i)} \check{y}_c^{(i)}(t) \right)$$

$2n$ frei wählbare Konstanten $c_\pm^{(i)}$ entsprechen $2n$ Anfangsbedingungen

<u>Beispiel:</u> $y_i(0) = y_{0i}$ ; $\dot{y}_i(0) = v_{0i}$

$$n=2, \quad m_1 = m_2 = m, \quad D_1 = D_2 = D, \quad D_{12} = d$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{D+d}{m} & -\frac{d}{m} \\ -\frac{d}{m} & \frac{D+d}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

⇒ charakteristische Gleichung:

$$\left( \frac{D+d}{m} - \omega^2 \right)^2 - \left( \frac{d}{m} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \omega^2 = \frac{D+d}{m} \pm \frac{d}{m}$$

⇒ Eigenfrequenzen sind $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$ ; $\omega_2 = \sqrt{\frac{D+2d}{m}}$

$$\Rightarrow \quad (D+d)(a_1)_1 - d(a_1)_2 = D(a_1)_1 \quad \Rightarrow (a_1)_1 = (a_1)_2$$

$$-d(a_2)_1 + (D+d)(a_2)_2 = (D+2d)(a_2)_2 \quad \Rightarrow (a_2)_1 = -(a_2)_2$$

⇒ Die Normalkoordinaten sind

$$\check{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \check{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⇒ Die allgemeine Lösung lautet

$$x_1(t) = b_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + b_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$x_2(t) = b_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - b_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

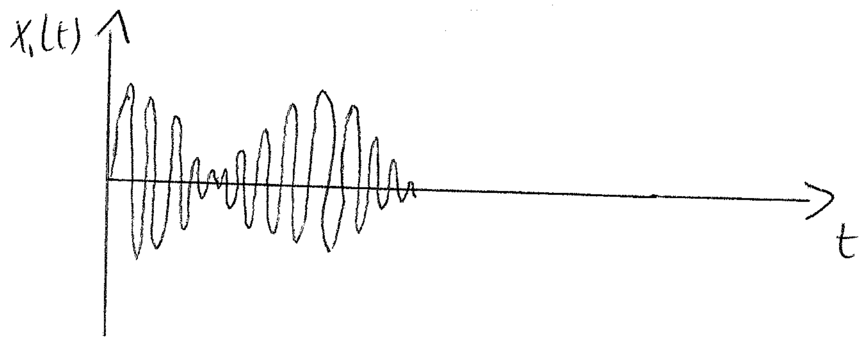
4 wählbare Konstanten $b_1, b_2, \phi_1, \phi_2$ können durch 4 Anfangs- oder Randbedingungen festgelegt werden.

Spezialfall: $b_1 = b_2 = b$, $\phi_1 = \phi_2 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = b(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2b \cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t \, \sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

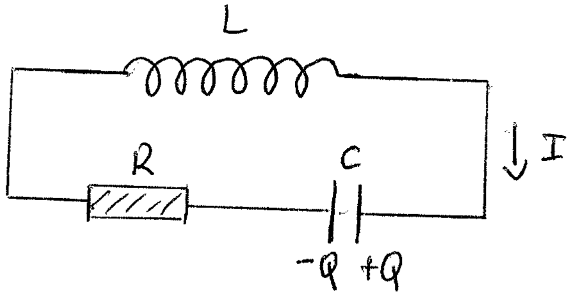
$$x_2(t) = b(\sin\omega_1 t - \sin\omega_2 t) = 2b \sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t \, \cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t$$

Für $|\omega_1-\omega_2| \ll |\omega_1+\omega_2|$ hat man "Schwebungen": Die Amplitude einer schnellen Oszillation wird langsam moduliert:




## Nicht-mechanische Schwingungen

Beispiel: Elektrischer Schwingkreis:




L = Impedanz (Induktion)
C = Kapazität (Kondensator)
R = Widerstand

Gesamtspannung $\quad U = 0 = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI$

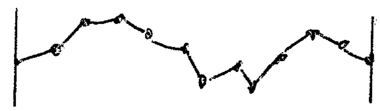
Differentiation liefert mit $I = \frac{dQ}{dt}$:

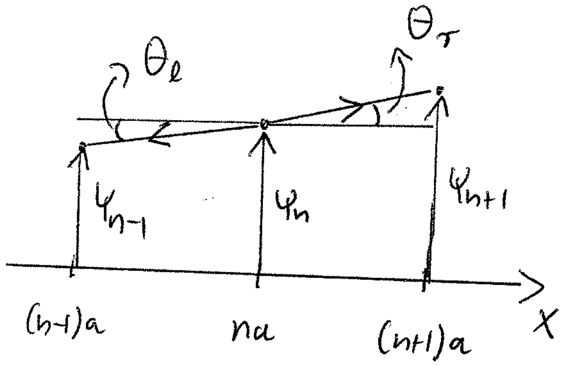
$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0$$

Das entspricht einer Frequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ der freien, ungedämpften Schwingung und einem Dämpfungsfaktor $\gamma = \frac{R}{2}$

# Mechanische Wellen

transversale Schwingungen einer Schnur mit $N$ Perlen, die an beiden Enden fest eingespannt ist






$1 \le n \le N$

$\varphi_n$ = transversale Auslenkung

Die Spannung in der Schnur sei $T_0$ = Elastizitätsmodul

$\Rightarrow$ transversale Kraft $F_\perp = T_0 \sin\theta_r - T_0 \sin\theta_l$

$$\simeq T_0 \frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{a} - T_0 \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{a}$$

Dies ist gleich der Newton'schen Kraft $m$ (= Masse der Perle) $\times\, a$

$$\Rightarrow \quad m \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} = T_0 \left( \frac{\varphi_{n+1}-\varphi_n}{a} - \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{a} \right)$$

Im limes $a \to 0$ können wir eine kontinuierliche Saite mit Masse pro Länge $= \rho_0 \;\Rightarrow\; m = \rho_0 a$

$$\Rightarrow \quad \rho_0 \frac{d^2\varphi_n}{dt^2} \Rightarrow \frac{T_0}{a}\left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(x = (n+\tfrac{1}{2})a\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(x = (n-\tfrac{1}{2})a\right) \right]$$

$$\to T_0 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x = na)$$

Daraus resultiert die <u>partielle Differentialgleichung</u>

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \to \text{ Wellengleichung in 1D}$$

$\psi$ = transversale Auslenkung ist nun Funktion von $t$ und der longitudinalen Koordinate $x$

Andere Schreibweise:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{mit} \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

Verallgemeinerung in 3D:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(\vec{r},t) - c^2 \Delta \psi(\vec{r},t) \; ; \qquad \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

<u>Lösungen der 1D Wellengleichung:</u>

definiere neue Koordinaten

$$u = x - ct \qquad v = x + ct$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial u} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{=-c} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{=c} = c\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right] = c^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2}\right)$$

Wellengleichung $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = 0$

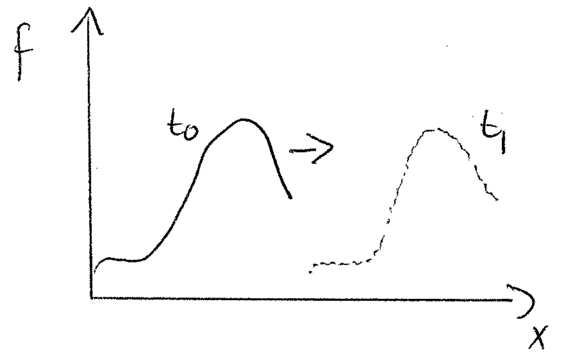
Integration über $u$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = h(v)$ für $v$ fix

Integration über $v$ $\Rightarrow$ $\varphi(u,v) = \int^{v} h(v')\,dv' + f(u) = g(v) + f(u)$

$\Rightarrow$ $\varphi(x,t) = g(x+ct) + f(x-ct)$

$\to$ Allgemeine Lösung sind "Wellen Formen" die sich nach links oder rechts mit Geschwindigkeit $c$ bewegen:

Sei $x_1 = x_0 + c(t_1 - t_0)$ $\Rightarrow$ $\varphi(x_1,t_1) \underset{\text{für } g=0}{=} f(x_1 - ct_1) = f(x_0 - ct_0) = \varphi(x_0,t_0)$




Spezialfälle:

Harmonische Wellen:

$$\varphi_\pm(x,t) = A e^{\pm i \frac{\omega}{c}(x-ct)} = A e^{\pm i(kx-\omega t)} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

oder $\mathrm{Re}[\varphi_\pm(x,t)] = A\cos(kx-\omega t)$

räumliche Periode $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$ "Wellenzahl $k$"

zeitliche Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Stehende Wellen:

Überlagerung von rechts- und linkslaufenden harmonischen Wellen mit gleicher Amplitude:

e.g. $\varphi(x,t) = A\cos(kx-\omega t) + A\cos(kx+\omega t)$

$= A[\cos kx \cos\omega t + \sin kx \sin\omega t + \cos kx \cos\omega t - \sin kx \sin\omega t)$

$= 2A \cos\omega t \cos kx$

$\varphi(x,t) = 0 \ \forall t$ für $x_n = (2n+1)\frac{\pi}{2k} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ $\to$ Schwingungsknoten

Separationsansatz:

$$\psi(x,t) = X(x)\,T(t)$$

$$\Rightarrow \quad c^2 T(t) \frac{d^2X}{dx^2} = X(x)\frac{d^2T}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^2}{X(x)}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{T(t)}\frac{d^2T}{dt^2} = \text{const.} = -c^2p^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2X}{dx^2} + p^2 X = 0 \qquad \frac{d^2T}{dt^2} + c^2p^2T = 0$$

→ gewöhnliche Differentialgleichungen mit den Lösungen

$$X(x) = A\cos px + B\sin px = b\cos(px+\beta)$$
$$T(t) = C\cos cpt + D\sin cpt = a(\cos cpt + \alpha)$$

Randbedingungen erlauben i.a. nur diskrete Werte $p_n$, $n \in \mathbb{N}$ für $p$
Dann lautet die allgemeine Lösung:

$$\psi(x,t) = \sum_n c_n X_n(x)\,T_n(t)$$

Die Konstanten $c_n$ werden durch Anfangsbedingungen $\psi(x,0)$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)$ festgelegt

<u>Beispiel</u>: An beiden Enden eingespannte Saite
Randbedingungen $\psi(x=0,t)=0 \quad \psi(x=L,t)=0$

$$\Rightarrow \quad X_n(x) = \sin p_n x \qquad \text{mit } p_n = \frac{n\pi}{L}\ ; \ n \in \mathbb{N}$$

⇒ allgemeine Lösung hat die Form

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\frac{cn\pi t}{L} + \alpha_n\right)$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\alpha_n$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\alpha_n \cdot \frac{cn\pi}{L}$$

Linke Seiten sind vorgegeben. Wähle $c_n$, $\alpha_n$ so, daß diese Bedingungen erfüllt sind

## Einschub: Fourier-Reihen

allgemeine Fourier-Reihe hat die Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Jede periodische Funktion $f(x+2\pi) = f(x)$ die ~~"hinreichend glatt"~~ beschränkt und stetig ist, kann so dargestellt werden. Man sagt man entwickelt in die orthogonalen Funktionen $\cos kx$ und $\sin kx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin k'x \, dx = \pi \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos k'x \, dx = \pi \delta_{kk'}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \sin kx \, dx = 0$$

Beweisbeispiel:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos k'x \underset{\text{Additionstheorem}}{=} \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((k+k')x) + \cos((k-k')x)] \, dx$$

$$= \frac{\delta_{kk'}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \pi \delta_{kk'}$$

Daraus folgen die Konstanten $a_k, b_k$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \, ; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$k = 0, 1, .. \qquad\qquad k = 1, 2, ..$$

Alternativ: komplexe Fourier-Reihen:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k e^{ikx}$$

Mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik'x} e^{ikx} dx = 2\pi \delta_{k'k}$$

hat man dann

$$g_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx =$$

Ausgedrückt durch die reellen Fourierkoeffizienten:

$$g_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp i b_k) \qquad k = 0,1,.. \qquad \text{mit } b_0 = 0$$

weil $e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx$

Anwendung: Bestimmung der Koeffizienten $c_n$, $\alpha_n$ aus den Anfangsbedingungen der Wellengleichung

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \cos\alpha_n$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = -\frac{c\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\alpha_n$$

definiere $x' = \frac{\pi x}{L}$ und definiere $\psi(x') = -\psi(-x')$ ; $\frac{\partial\psi}{\partial t}(x') = -\frac{\partial\psi}{\partial t}(-x')$

für $-\pi \le x' \le 0$

$$\Rightarrow \psi(x',0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx' \cos\alpha_n \qquad -\pi \le x' \le \pi$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x',0) = -\frac{c\pi}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \sin nx' \sin\alpha_n$$

$$\Rightarrow \qquad c_n \cos\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x',0) \sin nx' dx' =$$

allgemeine Formel für Fourier-Reihen

Integrand gerade in $x'$, substituiere $x$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \psi(x,0) \sin\frac{n\pi x}{L} dx =: \frac{2}{L} I_n$$

$$-\frac{c\pi n}{L}\, c_n \sin\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial\psi}{\partial t}(x',0)\sin n x'\, dx'$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \;:=\; \frac{2}{L} J_n$$

$$\Rightarrow \quad c_n \sin\alpha_n = -\frac{2}{c\pi n} J_n$$

$$\Rightarrow \quad c_n = 2\sqrt{\left(\frac{I_n}{L}\right)^2 + \left(\frac{J_n}{c\pi n}\right)^2} \qquad I_n = \int_0^L \psi(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

mit

$$\tan\alpha_n = -\frac{L}{c\pi n}\frac{J_n}{I_n} \qquad J_n = \int_0^L \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Also erfüllt

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\left(\frac{c n\pi t}{L} + \alpha_n\right)$$

die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t) - c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

mit den Randbedingungen

$$\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0 \quad \forall t$$

und den Anfangsbedingungen

$$\psi(x,t=0) = \text{gegeben}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t=0) = \text{gegeben}$$

Ferner ist dies die eindeutige Lösung.