Grundlagen der Dynamik

Axiome der Newton'schen Mechanik:

1. Trägheitsgesetz: Jeder kräftefreie Körper verharrt infolge seiner Trägheit ("träge Masse") im Zustand geradlinig-gleichförmiger Bewegung (mit Ruhe als Spezialfall)

2. Bewegungsgesetz: Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der auf ihn einwirkenden Kraft

$$\text{Impuls} = \underset{\substack{\swarrow \\ \text{träge Masse}}}{m}\,\vec{v} = m\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{p}$$

also

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} = m\vec{a}$$

3. Actio-Reactio-Gesetz: Jede Wirkung ruft eine gleich große Gegenwirkung hervor

d.h. die von einem Körper 1 auf einen Körper 2 ausgeübte Kraft $\vec{F}_{21}$ ist gleich dem Negativen der von Körper 2 auf Körper 1 ausgeübten Kraft $\vec{F}_{12}$:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Beachte: Axiom 1 folgt eigentlich aus Axiom 2

Darüber hinaus hat man

4. Superpositionsgesetz: Kräfte addieren sich vektoriell

In Newton's Mechanik sind Raum und Zeit absolut und bilden eine unveränderliche "Bühne" auf der sich alle Prozesse abspielen.

Der Raum ist Euklidisch und Axiom 2 gilt in sogenannten unbeschleunigten oder Inertialsystemen, die sich relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen.

In der Tat ist Axiom 2 invariant unter Transformationen zwischen Inertialsystemen, auch als Galilei-Transformation bekannt:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \underbrace{\vec{v}_0}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{t}_{\text{absolute Newton'sche Zeit}} + \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

$$\vec{a}\,' = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \vec{a}$$

$\Rightarrow$ Galileisches Relativitätsprinzip: Die Newton'sche Bewegungsgleichung ist forminvariant unter Galilei-Transformationen

Übrigens ist bis heute nicht vollständig verstanden was Inertialsysteme auszeichnet. Es scheint eine kosmologische Frage zu sein, da die Mikrowellenhintergrund-Strahlung ein bevorzugtes System etabliert. Nach dem Mach'schen Prinzip ist die Existenz von Raum, Zeit und Inertialsystemen an die kosmische Massenverteilung gebunden.

Beachte: Auf der Erde sind wir in einem rotierenden System, und damit nicht in einem Inertialsystem

$\Rightarrow$ "Scheinkräfte", z.B. Zentrifugalkraft, Corioliskraft

Ausblick: In der Relativitätstheorie werden Raum und Zeit relativ und Galileische Transformationen werden durch (etwas komplizierte) Lorentz-Transformationen ersetzt

Koordinatentransformationen – krummlinige Koordinaten

Im n-dimensionalen:

$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_n) = x_i(y_j) \qquad 1 \le i, j \le n$$

$$\Rightarrow dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

z.B. in 3D $n=3$ und oft schreibt man $(x_i) = (x, y, z)$; $(y_i) = (u, v, w)$ also

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w) \\ y &= y(u,v,w) \\ z &= z(u,v,w) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial u} dw \end{aligned}$$

In Euklidischen Koordinaten (x_i)

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n) = (x_i); \quad d\vec{r} = (dx_1, \dots, dx_n) = (dx_i) = \sum_i dx_i \vec{e}_i$$

mit $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

In allgemeinen krummlinigen Koordinaten (y_i) wird dies damit

$$d\vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} dy_i$$

z.B. in 3D

$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (dx, dy, dz) = \vec{e}_1 dx + \vec{e}_2 dy + \vec{e}_3 dz \\ &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} dv + \frac{\partial \vec{r}}{\partial w} dw \quad \text{mit } \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \text{ etc.} \end{aligned}$$

Man kann neue Basis-~~Ein~~heitsvektoren

$$\vec{u}_k := \frac{1}{b_k} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_k} \qquad \text{mit} \qquad b_k := \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_k} \right|$$

definieren, so daß

$$d\vec{r} = \sum_k \vec{u}_k ds_k \qquad \text{mit den Längenelementen } ds_k = b_k dy_k$$

Man nennt (y_i) ein orthogonales Koordinatensystem wenn

$$\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad \text{und damit auch} \quad \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}$$

an jedem Raumpunkt gilt

Dann ist das Flächenelement, das von zwei Seiten der Länge ds_i, ds_j aufgespannt wird, gegeben durch

$$dF_{ij} = ds_i \, ds_j = b_i b_j \, dy_i \, dy_j$$

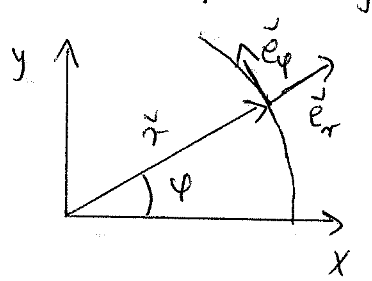
Und das Volumenelement

$$dV = \prod_{i=1}^{n} ds_i = \prod_{i=1}^{n} b_i \, dy_i$$

Ebene Polarkoordinaten

2D, $n=2$

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$$



$$\vec{r} = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Umkehrung: $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \pm \arctan\frac{y}{x}$ für $y \gtrless 0$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\cos\varphi, \sin\varphi) \quad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_r = \vec{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-r\sin\varphi, r\cos\varphi) \quad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = r \quad \Rightarrow \quad \vec{u}_\varphi = \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$$

Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r(t) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r(t) + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r(t)$$

$$\dot{\vec{e}}_r(t) = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)\,\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$\Rightarrow$ Wenn $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$ dann ist $v_r = \dot{r}$; $v_\varphi = r\dot{\varphi}$

$\dot{\varphi}$ ist die Winkelgeschwindigkeit

Beschleunigung $\vec a = \ddot{\vec r} = \dot{\vec v} = \frac{d}{dt}\left(v_r \vec e_r + v_\varphi \vec e_\varphi\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot r \vec e_r + r\dot\varphi \vec e_\varphi\right) =$

$$= \ddot r \vec e_r + \dot r \dot{\vec e}_r + \dot r \dot\varphi \vec e_\varphi + r\ddot\varphi \vec e_\varphi + r\dot\varphi \dot{\vec e}_\varphi =$$

$$= \left(\ddot r - r\dot\varphi^2\right)\vec e_r + \left(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi\right)\vec e_\varphi$$

$\dot{\vec e}_r = \dot\varphi \vec e_\varphi$

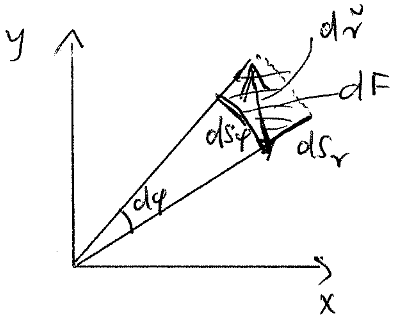
$\dot{\vec e}_\varphi = \dot\varphi(-\cos\varphi, -\sin\varphi) =$
$= -\dot\varphi \vec e_r$

mit $\vec a = a_r \vec e_r + a_\varphi \vec e_\varphi$ also

$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2$ Radialbeschleunigung

$a_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi$ Winkelbeschleunigung

Linien- und Flächenelemente:



$ds_r = dr \qquad ds_\varphi = r\,d\varphi$

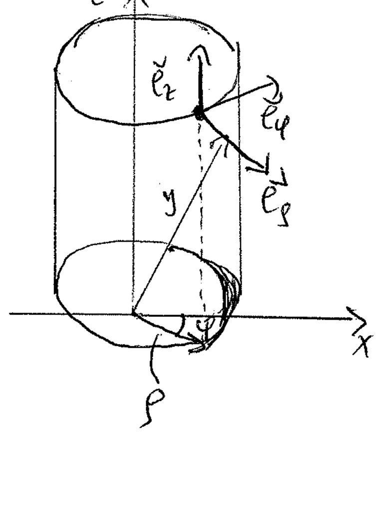
$\Rightarrow dF = dx\,dy = ds_r\,ds_\varphi = r\,dr\,d\varphi$

Zylinderkoordinaten

3D, $n=3$

$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z$

→ ebene Polarkoordinaten + darauf senkrechte z-Achse



Umkehrung

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = \pm\arctan\frac{y}{x}$ $y \geq 0$

$z = z$

Man findet die orthogonalen Einheitsvektoren

$$\vec{e}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0) \qquad \vec{e}_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \qquad \vec{e}_z = (0,0,1)$$

Ferner $\quad dV = ds_\rho \, ds_\varphi \, ds_z = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$

Für Geschwindigkeit und Beschleunigung erhält man

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{e}_z$$

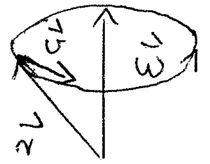
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\,\vec{e}_z$$

Kugelkoordinaten - sphärische Polarkoordinaten

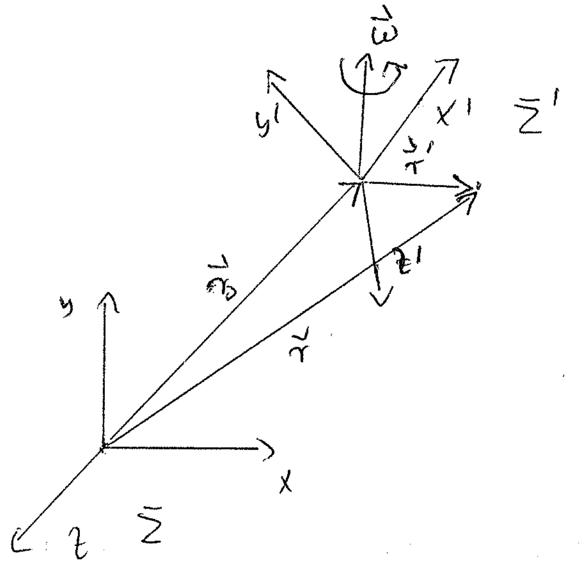
3D $\quad - n = 3$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

rotierendes Bezugssystem und Scheinkräfte



$$\vec v = \vec\omega \times \vec r$$



Für jeden Vektor $\vec b$ gilt: $\quad \vec b = \sum_i b_i \vec e_i = \sum_i b_i' \vec e_i\,'$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec b}{dt} = \sum_i \frac{db_i}{dt} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{zeitunabhängig}}}{\vec e_i} = \sum_i \frac{db_i'}{dt}\vec e_i\,' + \sum_i b_i' \underbrace{\frac{d\vec e_i\,'}{dt}}_{= \vec\omega \times \vec e_i\,'}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{d\vec b}{dt}\right)'}_{\text{Ableitung im } \Sigma'\text{-System}} + \vec\omega \times \vec b$$

Ferner:

$$\vec r(t) = \vec r_0(t) + \vec r\,'(t) \quad \Rightarrow \quad \vec v = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r}_0 + \left(\frac{d\vec r\,'}{dt}\right)' + \vec\omega \times \vec r\,'$$

$$= \dot{\vec r}_0 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Geschwindigkeit im } \Sigma'\text{-System}}}{\vec v\,'} + \vec\omega \times \vec r\,'$$

Nochmalige Differentiation ergibt Transformationsgesetz für die Beschleunigung:

$$\vec a = \frac{d^2\vec r}{dt^2} = \frac{d\vec v}{dt} = \ddot{\vec r}_0 + \left(\frac{d\vec v\,'}{dt}\right)' + \vec\omega \times \vec v\,' + \dot{\vec\omega} \times \vec r\,' + \vec\omega \times \left(\left(\frac{d\vec r\,'}{dt}\right)' + \vec\omega \times \vec r\,'\right)$$

$$= \ddot{\vec r}_0 + \vec a\,' + 2\vec\omega \times \vec v\,' + \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r\,') + \dot{\vec\omega} \times \vec r\,'$$

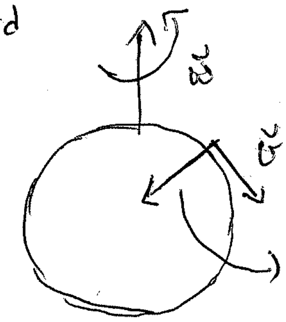
wobei $\check{a}' = \left(\frac{d\check{v}'}{dt}\right)'$ die Beschleunigung gemessen im Σ'-System ist

Einsetzen in $\vec{F} = m\check{a}$ gibt schließlich:

$$\underbrace{m\left(\frac{d^2\check{r}'}{dt^2}\right)'}_{=\check{a}'} = \check{F} - m\Big[\ddot{\vec{r}}_0 + \underbrace{2\vec{\omega}\times\check{v}'}_{\text{Coriolis-Kraft}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\check{r}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \dot{\vec{\omega}}\times\check{r}'\Big]$$

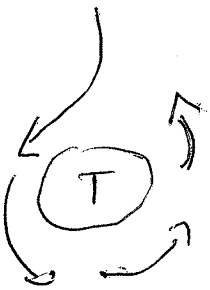
Beispiel: rotierendes terrestrisches Bezugssystem: Auf einen Luftstrom der sich auf der Nordhalbkugel von Nord nach Süd bewegt wirkt eine Corioliskraft die nach Westen zeigt. Deshalb drehen sich Luftmassen auf der Nordhalbkugel im Gegen-Uhrzeigersinn um Tiefdruckgebiete. Auf der Südhalbkugel ist es genau anders herum

Nord



$\check{F}_{Coriolis} = -2m\check{\omega}\times\check{v}'$ zeigt nach Westen

Süd



Gegenuhrzeigersinn auf der Nordhalbkugel

Spezielle Relativitätstheorie – Lorentztransformation

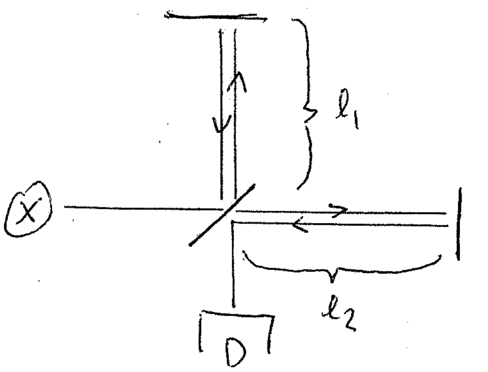
Galilei-Transformationen in der Newton'schen Mechanik führen zur Vektoraddition von Geschwindigkeiten:

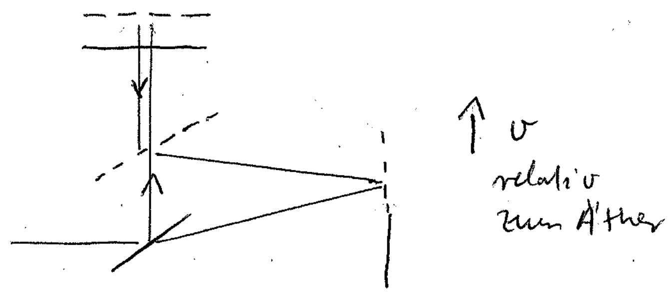
$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

$$\Rightarrow \vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{\underbrace{dt}} = \frac{d\vec{r}}{\underbrace{dt}_{\text{universelle Zeit}}} + \vec{v}_0 = \vec{v} + \vec{v}_0$$

insbesondere hängt Lichtgeschwindigkeit vom Bezugssystem (Inertialsystem) ab. $\exists$ bevorzugtes Inertialsystem in welchem Lichtgeschwindigkeit $= c_0$
$\rightarrow$ Äther ? Für den Schall ist der Äther die Luft

Michelson-Versuch:





Lichtlaufzeit in Arm 1 $= \dfrac{l_1}{c_0 - v} + \cancel{\dfrac{l_1}{c+v}}\ \dfrac{l_1}{c_0+v} = t_1 = \dfrac{2 l_1}{c_0} \dfrac{1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}$

" " Arm 2 : $\left(v \frac{t_2}{2}\right)^2 + l_2^2 = \left(c_0 \frac{t_2}{2}\right)^2 \Rightarrow t_2 = \dfrac{2 l_2}{c_0} \dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{2}{c_0}\left(\frac{l_1}{1 - \frac{v^2}{c_0^2}} - \frac{l_2}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}\right)$$

Drehung um 90° entspricht Austausch von l_1 und l_2:

$$\Delta t' = \frac{2}{c_0}\left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} - \frac{l_2}{1 - v^2/c_0^2}\right)$$

Die Differenz der Lichtlaufzeiten ändert sich damit um

$$\delta t = \Delta t - \Delta t' = \frac{2(l_1+l_2)}{c_0}\left(\frac{1}{1-v^2/c_0^2} - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c_0^2}}\right)$$

was die Interferenzmuster um die Phase

$$\Delta\Phi = \omega\,\delta t$$

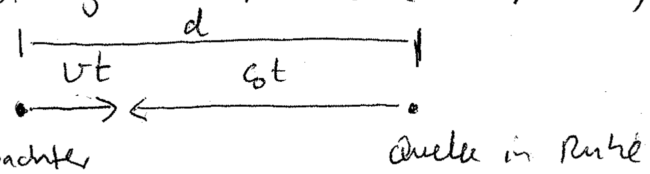
ω: Frequenz des Laserlichts

ändert.

Experimentell ist $\Delta\delta = \Delta\Phi = 0$ $\Rightarrow$

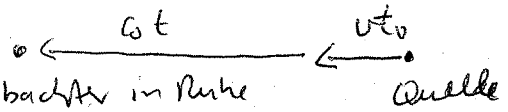
Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist universell und in jedem Inertialsystem identisch

Damit sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt und nur Relativgeschwindigkeiten sind physikalisch relevant.
Dies ist nicht der Fall in der Äthertheorie, wie folgendes Beispiel zeigt (Geschwindigkeiten relativ zum Äther)



Wenn $v=0$ und d = Distanz Beobachter – Quelle dann ist $t_0 = \frac{d}{c_0}$; wenn $v>0$ dann $d = c_0 t + v t$

$$\Rightarrow\ t = \frac{t_0}{1+v/c_0} \quad \Rightarrow \text{ Frequenz } f = \frac{1}{t} = f_0\left(1+\frac{v}{c_0}\right)$$



$$t = t_0 - \frac{v t_0}{c_0} + \frac{d}{c_0} \ \Rightarrow\ f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{f_0}{1-v/c_0} \qquad f_0 = \frac{1}{t_0}$$

$\Rightarrow$ die beiden Dopplereffekte wären in zweiter Ordnung in $\frac{v}{c_0}$ verschieden

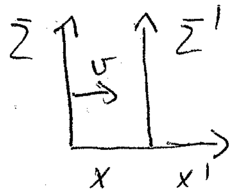
Eine Möglichkeit, die Lichtgeschwindigkeit unabhängig vom Inertialsystem zu halten ist

$$c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 = \text{unabhängig vom Inertialsystem}$$

zu setzen, denn dann ist für Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit $c_0^2 \Delta t^2 - (\Delta \vec{r})^2 = 0$ in allen Inertialsystemen.

Gesucht ist also eine Transformation (ohne Einschränkung mit nur einer Raumkoordinate):

$$x' = ax + bt$$
$$t' = cx + dt$$



$a, d > 0$

so daß

$$(c_0 t')^2 - x'^2 = (c_0 t)^2 - x^2$$

Definiere $a := \gamma$. ~~Für~~ Per Definition bewegt sich ein Punkt in Ruhe in Σ', $\Delta x' = 0$, mit Geschwindigkeit v in Σ, $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

$$0 = \Delta x' = \gamma \Delta x + b \Delta t \quad \Rightarrow \quad b = -\gamma \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\gamma v$$

also

$$x' = \gamma (x - vt)$$

Weiter

$$(c_0 t')^2 - x'^2 = c_0^2 (cx + dt)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2$$
$$= c_0^2 \left(d^2 - \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}\right) t^2 + (c_0^2 c^2 - \gamma^2) x^2 + 2(c_0^2 cd + \gamma^2 v) xt$$

$$\Rightarrow \underline{(1)\ d^2 = 1 + \gamma^2 \frac{v^2}{c_0^2}} \ ; \ \underline{(2)\ c_0^2 c^2 = \gamma^2 - 1} \ ; \ \underline{(3)\ c_0^2 cd = -\gamma^2 v}$$

$$\Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$$

quadriere (3)

multipliziere (1) und (2)

$$\Rightarrow c_0^2 c^2 d^2 = -1 + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right) + \gamma^4 \frac{v^2}{c_0^2}$$

Gleichsetzen $\Rightarrow \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c_0^2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$ weil $a = \gamma > 0$

$$(1) \Rightarrow \quad d^2 = \gamma^2\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c_0^2}\right) = \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad d = \gamma \quad \text{weil } d > 0$$

$$(3) \Rightarrow \quad c = -\frac{\gamma^2 v}{c_0^2 d} = -\gamma \frac{v}{c_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad x' = \gamma(x - vt)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c_0^2}\right) \qquad \text{mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}$$

Hinweis: Oft werden "natürliche Einheiten" verwendet für die $c_0 = 1$

Die Koordinaten $\perp$ $\vec{v}$ bleiben unverändert, d.h.

$$y' = y$$
$$z' = z$$

Beachte: Für $v/c_0 \to 0$ ist $\gamma = 1 + O(v^2) \Rightarrow$ In erster Ordnung in v erhält man Galilei-Transformation:

$$x' = x - vt + O(v^2)$$
$$t' = t - \frac{v\cancel{x}}{c_0^2} + O(v^2)$$

Anwendungen

1.) Geschwindigkeitsaddition oder -subtraktion

In System Σ bewege sich ein Teilchen mit Geschwindigkeit $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\Rightarrow$ In Σ' ist Geschwindigkeit

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - v\Delta x/c_0^2} = \frac{u - v}{1 - \frac{vu}{c_0^2}}$$

dividiere oben und unten durch Δt und verwende $u = \Delta x/\Delta t$

Für $u, v \ll c_0$ gilt Galilei-Transformation ~~bis auf~~ Terme zweiter Ordnung:

$$u' = u - v + O(v^2, u^2)$$

2.) Zeitdilatation

Betrachte einen Prozeß, der in $\bar{\Sigma}$ in Ruhe stattfindet und eine Zeit Δt dauert, z.B. radioaktiver Zerfall

$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t \geq \Delta t$$

Vierervektor-Formalismus

Verwende natürliche Einheiten $c_0 \equiv 1$ der Einfachheit halber

$$\Rightarrow t' = \gamma(t - vx) \qquad y' = y \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad z' = z$$

$(t, \vec{x})$ bildet "Vierervektor" dessen "Norm" $t^2 - \vec{x}^2$ erhalten ist

Analog bildet $(E, \vec{p})$ "Energie-Impuls-Vierervektor"

$$\Rightarrow E' = \gamma(E - v p_x)$$

$$p_x' = \gamma(p_x - vE)$$

$$p_y' = p_y$$

$$p_z' = p_z$$

Spezialfall: Teilchen in Ruhe in $\bar{\Sigma}$, also $\vec{p} = 0$, $E = m_0 =$ = Ruhemasse

$$\Rightarrow E' = \gamma E = \gamma m_0$$

$$p_x' = -\gamma v E = -\gamma v m_0$$

$$p_y' = p_z' = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}^2 + m_0^2 = m_0^2(1 + \gamma^2 v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2}(1 - v^2 + v^2) = \frac{m_0^2}{1-v^2} =$$

ersetze durch ungestrichene Größen

$$= \gamma^2 m_0^2 = E^2$$

in "alltäglichen" Koordinaten:

$$E^2 = c_0^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c_0^4 \qquad [E] = [mv^2], \quad [p] = [mv]$$

Beachte: E hat positive und negative Wurzel

E < 0 entspricht Anti-teilchen

→ in der Relativitätstheorie hat jedes Teilchen ein Anti-Teilchen

Nicht-relativistisches Limit:

$$E = \sqrt{m_0^2 + \vec{p}^{\,2}} = m_0 \sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\vec{p}^{\,2}}{m_0^2} + O(p^4) \right)$$

$$E = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2}} = m_0 \left(1 + \frac{1}{2} v^2 + O(v^2) \right)$$

$$\simeq m_0 + \underbrace{\frac{1}{2} m_0 v_0^2}_{\text{nichtrelativistische kinetische Energie}}$$

Allgemeine Form der Newton'schen Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r},t)$$ → gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m\ddot{x}_i = F_i(x_1,x_2,x_3,t) \qquad i=1,2,3$$

Mehrteilchensysteme für N Teilchen

$$m_j\ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1,..,\vec{r}_N,t) \qquad j=1,..,N$$

→ 3N Differentialgleichungen 2ter Ordnung → 3N "Freiheitsgrade"

Phasenraum

Für n Freiheitsgrade hat man den n-dimensionalen Ortsvektor $\vec{r}=(y_1,..y_n)$; Der von $\vec{u}=(\vec{r},\dot{\vec{r}})$ aufgespannte 2n dimensionale Vektorraum heißt Phasenraum. Definiere

$$u_j = y_j \qquad j=1,..,n$$
$$u_{j+n} = \dot{y}_j \qquad j=1,..,n$$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}_j = \dot{y}_j = u_{n+j}$$
$$\dot{u}_{j+n} = \ddot{y}_j = f_j(u_1,..,u_{2n},t) \qquad j=1,..,n$$

↘ Kraft kann auch von Geschwindigkeiten abhängen, z.B. Reibung, Lorentz-Kraft

hat die Form

$$\dot{\vec{u}} = \vec{g}(\vec{u},t)$$ → 2n gewöhnliche Differentialgleichungen <u>erster</u> Ordnung

Symmetrien dieser Gleichungen führen i.a. zu Erhaltungsgrößen
z.B. führt Zeit-unabhängigkeit i.a. zu Energieerhaltung

$\vec F$ heißt konservativ oder Gradienten-Kraft wenn

$$\vec F(\vec r) = -\vec\nabla V(\vec r)$$

mit $V(\vec r)$ eine Skalarfunktion genannt "Potential"

Dann ist

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 + V(\vec r)$$

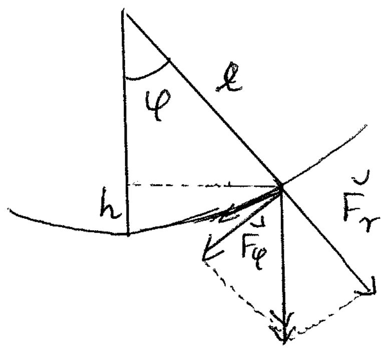
erhalten:

$$\frac{dE}{dt} = m\dot{\vec r}\cdot\ddot{\vec r} + \dot{\vec r}\cdot\vec\nabla V = \dot{\vec r}\cdot\left(m\ddot{\vec r} + \vec\nabla V\right)$$
$$= \dot{\vec r}\cdot\left(m\ddot{\vec r} - F(\vec r)\right) = 0$$

Beispiele

Schräger Wurf → siehe experimenteller Teil

mathematisches Pendel:



$$\vec F = -mg\,\vec e_z$$
$$= -\vec\nabla E_{pot}$$

mit $E_{pot} = mgh = mgl(1-\cos\varphi)$

wenn $l = $ const. ist $\vec F_\varphi = m a_\varphi$ in Polarkoordinaten

$F_\varphi = -mg\sin\varphi \qquad a_\varphi = l\ddot\varphi$

$\Rightarrow \quad ml\ddot\varphi = -mg\sin\varphi \qquad$ oder $\qquad \ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

Energie-Erhaltung:

$$E = E_{kin} + E_{pot} = \frac{m}{2}l^2\dot\varphi^2 + mgl(1-\cos\varphi) = \text{const.} = mgl(1-\cos\varphi_0)$$

$\varphi_0 = $ maximale Auslenkung ; Falls $\varphi_0 \leq \pi$

$$\Rightarrow \quad \dot\varphi = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}$$

damit kann man die Schwingungsperiode berechnen:

$$T = \int_0^T dt = 4\int_0^{T/4} dt = 4\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\dot\varphi} = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

Verwende $\cos\varphi - \cos\varphi_0 = 2\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$

definiere $k = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ und transformiere auf neue Variable

ξ mit $\sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{k}\,\sin\xi$ so daß $0 \le \xi \le \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{d\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{k - k\sin^2\xi}}$$

nun ist $\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = \sqrt{k}\cos\xi\,d\xi \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = 2\sqrt{k}\,\frac{\cos\xi}{\cos\varphi/2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{2\sqrt{k}\cos\xi\,d\xi}{\sqrt{k}\cos\xi\,\cos\varphi/2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi/2}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k\sin^2\xi}} = K(k) \quad = \text{vollständiges elliptisches Integral}$$

$$\Rightarrow \quad T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,K\left(\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\right)$$

Taylor Entwicklung von $K(k)$ um $k=0$:

$$K(k) \simeq \int_0^{\pi/2} d\xi\left(1 + \frac{k}{2}\sin^2\xi\right) \simeq \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{k}{4}\right)$$

Für $k \to 0$ ist $T \to 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$. Das entspricht der harmonischen Näherung $\sin\varphi \simeq \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi \simeq \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

Lösungen sind

$$\varphi(t) = A\sin\omega_0 t + B\cos\omega_0 t$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, also $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$

Dies entspricht dem Federpendel

$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \text{mit } E_{pot} = \frac{k}{2}x^2 \qquad F = -\frac{dE_{pot}}{dx} = -kx$$

Erhaltung von Impuls und Drehimpuls

Impuls eines Teilchens $:= \vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$

Ruhemasse in Newton'scher Physik
ansonsten $m \to m\gamma$
"bewegte Masse"

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{p}} = \vec{F}(\vec{r},t)$$

Drehimpuls $\vec{L} := m\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{r}\times\vec{p}$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = m\underbrace{\dot{\vec{r}}\times\dot{\vec{r}}}_{=0} + m\,\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\times\dot{\vec{p}} = \vec{r}\times\vec{F} = \text{"Drehmoment"}$$

N-Teilchensystem: $\quad r_{jk} := |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = r_{kj}$

Angenommen nur Zentralkräfte $\vec{F}_{jk}$ wirken von Teilchen k auf Teilchen j

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{jk} = F_{jk}(r_{jk})\,\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{r_{jk}} \qquad \text{also} \quad \dot{\vec{p}}_j = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \vec{F}_{jk}$$

insbesondere

$$\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj} \quad \to \text{3. Newton'sches Axiom!}$$

Definiere:

$$\vec{P} = \sum_j \vec{p}_j \qquad \vec{L} = \sum_j \vec{L}_j = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{p}_j$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{P}} = \sum_j \dot{\vec{p}}_j = \sum_{j\neq k} \vec{F}_{jk} = 0$$

$\Rightarrow$ Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j$ bewegt sich mit Geschwindigkeit

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j \dot{\vec{r}}_j = \frac{1}{M}\sum \vec{p}_j = \frac{\vec{P}}{M} = \text{const.}$$

$$\dot{\vec{L}} = \sum_j \dot{\vec{L}}_j = \sum_j \vec{r}_j \times \sum_{k,k\neq j} \vec{F}_{jk} = \sum_{j\neq k} \frac{F_{jk}(r_{jk})}{r_{jk}}\,\vec{r}_j\times(\vec{r}_j - \vec{r}_k)$$

$$= -\sum_{j\neq k} \frac{F_{jk}(r_{jk})}{r_{jk}}\,\vec{r}_j\times\vec{r}_k = 0 \quad \text{weil } \vec{r}_j\times\vec{r}_k = -\vec{r}_k\times\vec{r}_j$$

Zweiteilchensystem

Definiere:

$$\breve{r} = \breve{r}_{12} = \breve{r}_1 - \breve{r}_2 \quad = \text{Relativkoordinate}$$

$$M = m_1 + m_2 = \text{Gesamtmasse} \qquad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{"reduzierte Masse"}$$

$$\breve{R} = \frac{1}{M}(m_1 \breve{r}_1 + m_2 \breve{r}_2) = \text{Schwerpunkt}$$

Dann

$$\breve{F}(\breve{r}) := \underbrace{\breve{F}_{12} = F(r)\,\hat{\breve{r}}}_{\text{Zentralkraft}}$$

Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\breve{r}}_1 = \breve{F}_{12} \qquad m_2 \ddot{\breve{r}}_2 = \breve{F}_{21}$$

$\Rightarrow$ $\ddot{\breve{R}} = 0$ wie im N-Körpersystem

$$\ddot{\breve{r}} = \ddot{\breve{r}}_1 - \ddot{\breve{r}}_2 = \frac{1}{m_1}\breve{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\breve{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\breve{F}(\breve{r})$$

$$\Rightarrow \mu \ddot{\breve{r}} = \breve{F}(\breve{r})$$

Ferner

$$\breve{L}_{tot} = \breve{L}_1 + \breve{L}_2 = \breve{L}_S + \breve{L}$$

$$\breve{L}_S = M \breve{R} \times \dot{\breve{R}} = \breve{R} \times \breve{P} \quad = \text{Drehimpuls der Schwerpunktsbewegung}$$

$$\breve{L} = \breve{r} \times \breve{p} = \mu \breve{r} \times \dot{\breve{r}} \quad = \text{Relativdrehimpuls}$$

denn: